10. Klasse TOP 10 Grundwissen	10
Polynomdivision (nicht im Lehrplan)	**10**

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund100.pdf

Beispiel: $\underbrace{(x^3 - 6x^2 + 9x - 2)}_{\text{Dividend}} : \underbrace{(x - 2)}_{\text{Divisor}}$

Die Polynome werden — wenn nicht schon geschehen — nach fallenden Potenzen geordnet. Man beginnt mit der Division der höchsten Potenzen von Dividend und Divisor, hier also $x^3 : x$. Das Ergebnis (hier x^2) schreibt man rechts vom Gleichheitszeichen an; dieses Ergebnis multipliziert man mit dem Divisor (hier also $x^2 \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2$) und notiert dies unter dem Dividenden.

Bis jetzt steht also da:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 \ldots \\ \underline{x^3 - 2x^2} \end{array}$$

Da jetzt subtrahiert werden muss (hier $-(x^3 - 2x^2) = -x^3 + 2x^2$), ist es zweckmäßig, die Vorzeichen durch darüberschreiben zu ändern und dann zu rechnen:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 \ldots \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \quad \downarrow \\ \qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Man rechnet} \\ -6x^2+2x^2=-4x^2 \quad \downarrow \\ \qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \text{nächste Stelle herunterholen} \\ \quad -4x^2 + 9x \end{array}$$

Das Verfahren wird nun fortgesetzt (höchste Potenzen dividieren: $-4x^2 : x = -4x$ anschreiben, dann mit Divisor multiplizieren: $-4x \cdot x = -4x^2$ und $-4x \cdot (-2) = +8x$ notieren), dann steht da:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 - 4x \ldots \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ \quad -4x^2 + 9x \\ \quad \underline{-4x^2 + 8x} \end{array}$$

Wieder werden die Vorzeichen geändert, die entsprechende Rechnung durchgeführt (hier $9x - 8x = x$), die nächste Stelle heruntergeholt und abermals das ganze Verfahren durchgeführt, bis dasteht:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 - 4x + 1 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ \quad -4x^2 + 9x \\ \quad \underline{+4x^2 - 8x} \\ \qquad\qquad x - 2 \\ \qquad\qquad \underline{-x + 2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Bleibt Rest 0, so ist die Polynomdivision ist aufgegangen.

Beispiel zur Division mit Rest → ueb100.pdf

Nullstellen ganzrationaler Funktionen: Gleichungen höheren Grades

Beispiel einer (Polynom-)Gleichung höheren (hier vierten) Grades: $x^4 + 9x^2 - 2x = 6x^3$

1. Schritt: Gleichung nach 0 auflösen: $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x = 0$

2. Schritt: Falls die Konstante fehlt, x ausklammern: $x(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) = 0$

Das Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also: $x_1 = 0$ oder …

3. Schritt: $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$

Lösung „erraten“ (zuerst Teiler der Konstanten -2 probieren): $x_2 = 2$

Polynomdivision durch „x minus Lösung“: $(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 - 4x + 1$

Das Verfahren (Lösung erraten, Polynomdivision) wird so lange durchgeführt, bis sich eine quadratische Gleichung ergibt.

4. Schritt: Löse die quadratische Gleichung: $x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x_{3/4} = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Die Lösungen sind also: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$

Eine Gleichung n-ten Grades (hier 4. Grades) kann bis zu n Lösungen haben.

Faktorzerlegung: $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x = x(x - 2)(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3}))$