11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Kurvendiskussion, Newton-Verfahren — 10

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen
Ziel: Zu einem gegebenen Funktionsterm $f(x)$ sollen möglichst viele charakteristische Eigenschaften des Funktionsgraphen gefunden werden.

Definitionsbereich (maximaler): Bei ganzrationalen Funktionen $D = \mathbb{R}$
(Kritisch sind bei anderen Funktionstypen: Brüche: Nenner gleich 0 setzen, liefert Definitionslücken. Wurzeln: Radikand ≥ 0 setzen, liefert Definitionsbereich. Logarithmen: Numerus > 0 setzen, liefert Definitionsbereich).

Asymptoten kann es bei anderen Funktionstypen (z. B. $\rightarrow$ grund113.pdf) an den Rändern des Definitionsbereichs geben, d. h. zu bilden sind $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (eventuelle waagrechte Asymptoten) bzw. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (eventuelle senkrechte Asymptoten an den Definitionslücken).

Bei ganzrationalen Funktionen ergibt sich der prinzipielle Verlauf im Unendlichen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ aus der höchsten Potenz und deren Koeffizient.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$

Nullstellen sind Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

Exrema und Monotonie: $f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f' ermitteln („Methode mit dem Strich" siehe Grundwissen 10/7, dabei auch Definitionslücken markieren).
$f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.
Dazwischen je nach Situation: Maximum (steigt-fällt), Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt), bei anderen Funktionstypen eventuell Definitionslücken.
Die y-Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in $f(x)$ ganz oben.

Wendepunkte und Krümmung: $f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Wiederum Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln.
$f''(x) > 0$: Graph linksgekrümmt in diesem Bereich; $f''(x) < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen je nach Situation: Wendepunkt (bei Wechsel der Krümmung), Flachpunkt, eventuell Definitionslücke. y-Koordinaten wieder durch Einsetzen in $f(x)$ ganz oben.

Skizze: Der Graph kann nun anhand der bisherigen Daten skizziert werden. Auch wenn man einzelne Teile der Kurvendiskussion nicht bearbeiten konnte, ist eine Skizze mit Hilfe einer Wertetabelle stets möglich! Für einige x-Werte (z. B. 0 oder ± 1 oder bei Symmetrie) ist die Berechnung von f(x) ganz einfach; bei $x = 0$ erhält man den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Wertebereich: Dieser kann mit Hilfe der Skizze leicht bestimmt werden, indem man betrachtet, welche y-Werte beim Graphen vorkommen können. (Hält man das Lineal parallel zur x-Achse und schiebt man es von unten nach oben durch, so sieht man, welche dieser Parallelen vom Graphen geschnitten wird und welche y-Werte somit vorkommen).

Newton-Verfahren:
Zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen wird folgende Iterations-Idee verwendet:

- Wahl eines geeigneten Startwertes x_0.
- Berechnung der Tangente t im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$:
  $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
- Berechnung der Nullstelle x_1 der Tangente:
  $t(x) = 0$ liefert $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  In der Regel ist x_1 ein besserer Näherungswert für die gesuchte Nullstelle von f (siehe Abb.).
- Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens mit x_1 usw. als neuem Startwert.