11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Funktionseigenschaften — 01

Grenzwerte im Unendlichen (d. h bei sehr großen x-Werten):
Vielen Funktionstermen sieht man das Verhalten für $x \to \pm\infty$ direkt an: So ist bei Polynomen die höchste Potenz (und deren Koeffizient) bestimmend; Exponentialfunktionen mit Basis $a > 1$ wachsen für $x \to +\infty$ ins Unendliche, mit $a < 1$ nähern sich deren Graphen der x-Achse. Brüche mit unendlich großem Nenner und endlichem Zähler gehen gegen 0.
Beispiele:
Für $h_1(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ gilt (wegen „x^4") $\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) \to +\infty$.
Für $h_2(x) = -0{,}1x^3 + 16$ gilt (wegen „$-x^3$") $\lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_2(x) \to -\infty$.
Für $h_3(x) = 1{,}04^x - 3$ gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_3(x) = -3$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_3(x) \to +\infty$.
Für $h_4(x) = -\frac{4}{x-1}$ gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_4(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_4(x) = 0$.
Bei Bruchfunktionen bietet sich an, mit der höchsten Potenz des Nenners zu kürzen.
Beispiele:

- $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$. Mit x^2 kürzen, d. h. Zähler und Nenner durch x^2 dividieren:
  $f(x) = \dfrac{x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}}{10 - \frac{10}{x^2}}$. Hier erkennt man nun, dass bei Einsetzen sehr großer x-Werte $\frac{16}{x^2}$ und $\frac{10}{x^2}$ gegen 0 gehen, so dass am verbleibenden Term das Verhalten für sehr große x-Werte bequem sichtbar ist: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-8}{10} \to \infty$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-1}{5x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}} = \frac{4}{5}$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-1}{5x^3+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x^3}} = 0$.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$
Beispiele:
$f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^4-8(-x)^2+16}{10(-x)^2-10} = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10} = f(x).$$

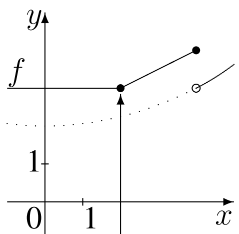
$h_5(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

$$h_5(-x) = \frac{(-x)^3-4(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3+4x}{x^2+1} = \frac{-(x^3-4x)}{x^2+1} = -\frac{x^3-4x}{x^2+1} = -h_5(x).$$

Falls Symmetrie vorliegt, erleichtert dies später oft die Arbeit, z. B. beim Berechnen von Funktionswerten.

Stetigkeit
Formal: An der zu betrachtenden Stelle nähern sich die Funktionswerte von links und von rechts dem gleichen Wert.
Anschaulich: Der Graph kann im Definitionsbereich ohne Absetzen des Schreibstiftes gezeichnet werden, macht also keine Sprünge. Für die bekannten Funktionstypen ist dies der Fall, zu prüfen ist die Nahtstelle bei abschnittsweise gegebenen Funktionen.
Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls } x \leq 2 \\ 2 + 0{,}5x & \text{falls } 2 < x \leq 4 \\ 2 + \frac{1}{16}x^2 & \text{falls } x > 4 \end{cases}$$



Einzusetzen ist für die Prüfung der Stetigkeit in den jeweils „zuständigen" Term, also z. B. für „$x = 2$ von rechts" in den mittleren Term des Bereichs $2 < x \leq 4$:
Nahtstelle $x = 2$: $f(2) = 3$ (Funktionswert selbst als „Knödel" in der Zeichnung),
von links: $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = 3$, von rechts: $\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = 2 + 0{,}5 \cdot 2 = 3$: Stetig bei $x = 2$.
Nahtstelle $x = 4$: $f(4) = 2 + 0{,}5 \cdot 4 = 4$, von links: $\lim\limits_{x\to4-0} f(x) = 2 + 0{,}5 \cdot 4 = 4$,
von rechts: $\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = 2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 = 3 \neq 4$: Nicht stetig an der Stelle $x = 4$.