11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Gebrochen-rationale Funktionen — 03

Am Term schnell sichtbar sind die Definitionslücken (Nenner!), die Nullstellen (Zähler!) sowie das Verhalten im Unendlichen (Vergleich von Zähler- und Nennergrad).

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+2}$

Definitionslücke: Nenner $2x+2=0$ ergibt $x = -1$, also Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Nullstelle: $f(x) = 0$ ergibt Zähler $x^2 = 0$, also $x_{1/2} = 0$ (doppelt).

Verhalten in der Nähe der Definitionslücke:
Mit dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x)$ wird das rechts- bzw. linksseitige Verhalten der Funktion in der Nähe der Definitionslücken ermittelt, d. h. für x-Werte wie $-0{,}99$ („-1 plus ein bisschen“) bzw. $-1{,}01$ („-1 minus ein bisschen“).
Im Folgenden: Rechtsseitig (oberes Vorzeichen), linksseitig (unteres Vorzeichen)[1]:
Symbolisch notiert man[2]

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Man denke sich } -1\pm 0 \text{ für } x \text{ eingesetzt}}}{=} \text{”}\,\frac{(-1\pm 0)^2}{-1\pm 0+1}\,\text{”} = \text{”}\,\frac{+1}{\pm 0}\,\text{”} \to \pm\infty$$

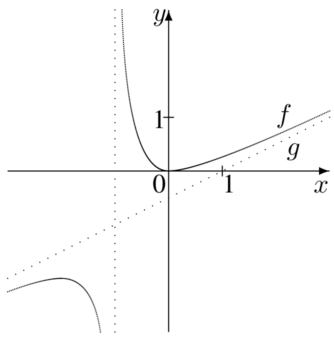
Wichtig ist hierbei, das Vorzeichen im Nenner zu betrachten und sich klar zu machen, dass „2 geteilt durch eine sehr kleine Zahl sehr groß wird“.

Bedeutung: Der Graph hat die senkrechte Asymptote $x = -1$, hier wegen des Nenners $2x + 2 = 2(x + 1)^1$ Pol erster Ordnung mit Vorzeichenwechsel (Vielfachheit der Polstelle $\to$ ueb113.pdf, Aufgabe 3).

***h*-Methode**:
Formal etwas sauberer als obige symbolische Notation ist das Einsetzen von $-1 \pm h$ für x, wobei h „klein“ ist:

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1\pm h) = \lim_{h\to 0} \frac{(-1\pm h)^2}{2(-1\pm h)+2} = \lim_{h\to 0} \frac{1\pm 2h+h^2}{\pm 2h} \to \pm\infty$$

(Hier sind wieder die Vorzeichen im Zähler ($+1$, der Rest spielt keine Rolle, da sehr klein) und Nenner ($\pm$) zu betrachten, um das Vorzeichen $\pm\infty$ zu ermitteln.)



Schräge Asymptote, wenn der Grad des Polynoms im Zähler um 1 größer als der Grad des Polynoms im Nenner ist:
Hierfür muss eine Umformung in „linearer Term plus Restterm“ gegeben sein[3], welche umgekehrt durch Erweitern auf den gemeinsamen Nenner nachgewiesen werden kann:
$f(x) = \frac{x^2}{2x+2} = \underbrace{\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\tfrac{2}{2x+2}}_{\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty}$

Somit ist $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ der Term der schrägen Asymptote, an die sich der Graph im Unendlichen anschmiegt.
(Nachweis: $0{,}5x - 0{,}5 + \frac{1}{2x+2} = \frac{(0{,}5x-0{,}5)(2x+2)}{2x+2} + \frac{1}{2x+2} = \frac{x^2+x-x-1+1}{2x+2} = \frac{x^2}{2x+2}$).

Waagrechte Asymptote, wenn Grad des Zähler-Polynoms $\leq$ Grad des Nenner-Polynoms, z. B. $f(x) = \frac{4x-1}{5x+3}$ hat waagrechte Asymptote $y = \frac{4}{5}$ ($\to$ grund111.pdf), $f(x) = \frac{1-x}{0{,}5x^2-x-1{,}5}$ hat die x-Achse als waagrechte Asymptote.

---

[1] Es empfiehlt sich, zuerst „rechtsseitig“ zu betrachten und dann für „linksseitig“ mit Farbstift die Vorzeichen an den entsprechenden Stellen zu ändern.

[2] Für diese symbolische Notation ist manchmal ein Faktorisieren des Funktionsterms nötig, z. B. liefert bei $f(x) = \frac{1-x}{0{,}5x^2-x-1{,}5}$ die Lösungsformel für den Nenner $x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5}}{2\cdot 0{,}5}$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, sodass man mit „x minus Lösung“ schreiben kann: $f(x) = \frac{1-x}{0{,}5(x-3)(x+1)}$, vgl. auch ueb113.pdf, Aufgaben 1 und 2.

[3] Diese kann durch Polynomdividion gewonnen werden, siehe grund100.pdf, nicht im Lehrplan.