11. Klasse TOP 10 Grundwissen	**11**
Bedingte Wahrscheinlichkeit	**04**

Absolute und relative Häufigkeit → grund62.pdf,
Vierfeldertafel → grund95.pdf, zusammengesetzte Zufallsexperimente, Pfadregeln → grund102.pdf

Formel von Bayes

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Beispiel

Ein Bauunternehmer bezieht zum Terrassen-Pflastern 400 Steinplatten, und zwar zu $\frac{4}{5}$ Steinplatten I. Wahl (Anteil beschädigter Platten 5 %) und zu $\frac{1}{5}$ Platten II. Wahl (Anteil beschädigter Platten 15 %). Aus der Gesamt-Lieferung wird zufällig eine Platte herausgegriffen.
Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine beschädigte Platte aus der Lieferung I. Wahl? Oder anders formuliert: Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich unter der Bedingung, dass die Platte beschädigt ist, um eine Platte aus der I.-Wahl-Lieferung?

4-Felder-Tafel

Bei einer Aufteilung der Gesamtzahl nach mehreren Merkmalen kann man eine 4-Felder-Tafel erstellen, wobei die Zeilen bzw. Spalten jeweils mit Merkmal/nicht-Merkmal beschriftet werden und die Zahlen in jeder Zeile bzw. Spalte jeweils addiert werden (bzw. umgekehrt fehlende Felder auf diese Weise ergänzt werden).
In obigem Beispiel seien
W_1: „Die zufällig gezogene Platte ist aus der I.-Wahl-Lieferung“ und
B: „Die zufällig gezogene Platte ist beschädigt“.

4-Felder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten

	B	$\overline{B}$	
W_1	**16**	304	**320**
$\overline{W_1}$	**12**	68	**80**
	28	372	**400**

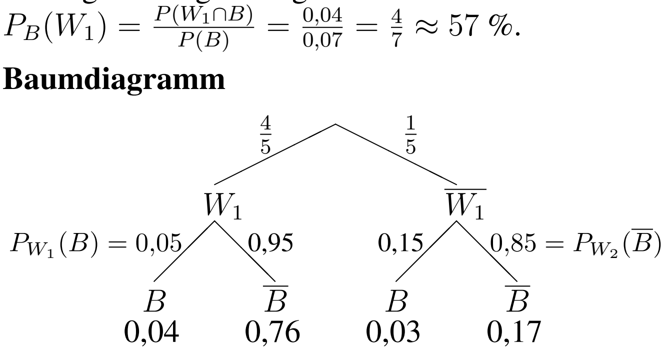
4-Felder-Tafel mit Wahrscheinlichkeiten

	B	$\overline{B}$	
W_1	**0,04**	0,76	**0,80**
$\overline{W_1}$	**0,03**	0,17	**0,20**
	0,07	0,93	**100 % = 1**

(Fett gedruckte Felder werden zuerst ausgefüllt (z. B. $320 = \frac{4}{5}$ von 400; im Feld $W_1 \cap B$: 5 % von $320 = 16$ bzw. 5 % von $\frac{4}{5} = 0{,}05 \cdot 0{,}80 = 0{,}04$), für den Rest entsprechende Zeilen- bzw. Spaltensummen betrachtet.)

Lösung der obigen Frage mit absoluten Häufigkeiten: Hat man eine der 28 beschädigten Platten vor sich, von denen 16 aus der Lieferung I. Wahl stammen, so erkennt man:
$P_B(W_1) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \approx 57$ %.
Lösung der obigen Frage mit Wahrscheinlichkeiten und der Formel von Bayes:
$P_B(W_1) = \frac{P(W_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}04}{0{,}07} = \frac{4}{7} \approx 57$ %.

Baumdiagramm



Bei den Beschriftungen der Äste der 2. Stufe B bzw. $\overline{B}$ handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten, z. B. Wahrscheinlichkeit für „beschädigt“ unter der Bedingung „I. Wahl“: $P_{W_1}(B) = 0{,}05$ usw.
Die unter den Pfaden stehenden Wahrscheinlichkeiten werden durch Anwendung der Pfadregeln (→ grund102.pdf) berechnet (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen): $P(W_1 \cap B) = P(W_1) \cdot P_{W_1}(B) = \frac{4}{5} \cdot 0{,}05 = 0{,}04$ usw.

Für das aus den Pfaden $W_1 - B$ und $\overline{W_1} - B$ zusammengesetzte Ereignis B gilt:
$P(B) = 0{,}04 + 0{,}03 = 0{,}07$.
Mit der Formel von Bayes berechnet man die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit:
$P_B(W_1) = \frac{P(W_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}04}{0{,}07} = \frac{4}{7} \approx 57$ %.