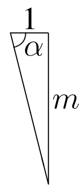
11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Ableitung, Tangenten — 07

Berechnung der Ableitungsfunktion $f'(x) \to$ grund116.pdf.
Graphisches Differenzieren $\to$ ueb116.pdf, Aufgabe 6.

Tangenten an den Funktionsgraphen von f im Punkte $P(x|y)$:
Zunächst bestimmt man den y-Wert durch Einsetzen von x in $f(x)$.
Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + t$
Die Steigung m erhält man mit der Ableitung an der Stelle x: $m = f'(x)$.
Den y-Achsenabschnitt t erhält man durch Einsetzen der Punktkoordinaten.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 8x + 1$, $P(2|?)$.
y-Wert: $f(2) = -11$, also $P(2|-11)$.
Steigung: $f'(x) = 2x - 8$, $f'(2) = -4$. Also Tangente: $y = -4x + t$.
P einsetzen: $-11 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -3$. Also Tangente: $y = -4x - 3$.

Zum Aufstellen der Tangentengleichung an der Stelle x_0 könnte man auch direkt die Formel $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ verwenden.

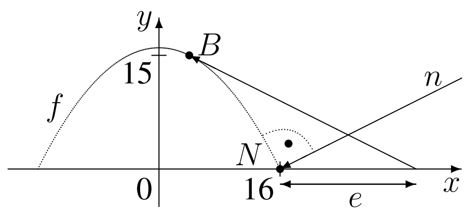


Den **Schnittwinkel** α einer Geraden $g(x) = mx + t$ mit der x-Achse und den **Neigungswinkel der Tangente** erhält man mit $m = \tan\alpha$.
Mit der SHIFT-tan- bzw. INV-tan-Funktion des Taschenrechners erhält man dann α.

Beispiel: $g(x) = -4x - 3$. $m = -4 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha \approx -75{,}96°$.

Normale: Unter einer Normalen versteht man in der Mathematik eine senkrecht stehende Gerade. Zu einer vorgegebenen Steigung m_1 erhält man die Steigung m_2 der Normalen mit der Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Beispiel-Aufgabe:
Es gibt Gebäude in Form einer Parabel, z. B. der Bahnhof von Eskişehir in der Türkei. Es wird angenommen, dass die Gleichung des parabelförmigen Dachs durch $f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + 16$ gegeben ist.
Zu berechnen sind (vgl. Skizze):



1. Die Entfernung e, in der man mindestens stehen muss, um bis zu einer Höhe von $y = 15$ das Dach sehen zu können;

2. Die Gleichung der Normalen n, falls man senkrecht zur Dachfläche auf den Boden-Punkt N blickt.

Lösungen:

1. Tangente im Punkt $B(?|15)$:
   $f(x) = 15$; $-\frac{1}{16}x^2 + 16 = 15$; $\frac{1}{16}x^2 = 1$; $x = \pm 4$, also $B(4|15)$.
   $f'(x) = -\frac{1}{16} \cdot 2x = -\frac{1}{8}x$, $m = f'(4) = -\frac{1}{8} \cdot 4 = -\frac{1}{2}$.
   Tangtenten-Ansatz: $y = mx + t$, hier also $y = -\frac{1}{2}x + t$.
   B einsetzen: $15 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + t$. $t = 17$. Tangente somit: $y = -\frac{1}{2}x + 17$.
   Schnitt der Tangente mit der x-Achse: $0 = -\frac{1}{2}x + 17$; $x = 34$.
   Abstand e zur Parabel-Nullstelle somit: $e = 34 - 16 = 18$.

2. Tangentensteigung im Punkt $N(16|0)$: $m_t = f'(16) = -\frac{1}{8} \cdot 16 = -2$.
   Normalensteigung wegen $m_t \cdot m_n = -1$ ist $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.
   Normalen-Ansatz: $y = mx + t$, hier also $y = \frac{1}{2}x + t$.
   N einsetzen: $0 = \frac{1}{2} \cdot 16 + t$. $t = -8$. Normale somit: $y = \frac{1}{2}x - 8$.