11. Klasse TOP 10 Grundwissen	**11**
Monotonie, Extrema	**08**

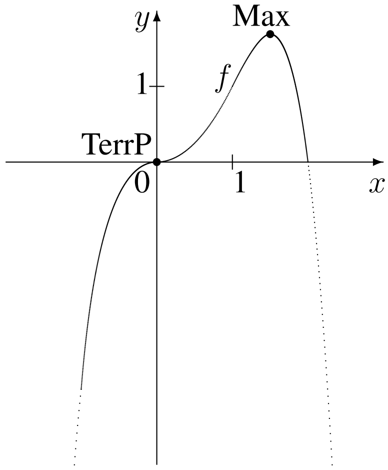
Monotonie:
$f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f' ermitteln ($\rightarrow$ grund106.pdf, dabei auch eventuelle Definitionslücken markieren).
Strenge Monotonie: $f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.
Nur von „monoton steigend" kann gesprochen werden, wenn immer weiter rechts der Graph höher oder mindestens gleich hoch liegt, wenn also für $x_2 > x_1$ dann $f(x_2) \geq f(x > 1)$ gilt (während für „streng monoton steigend" der Graph weiter rechts echt höher liegen muss, also $f(x_2) > f(x_1)$ gelten muss). In diesem Fall einfacher Monotonie könnte ein Graph z. B. abschnittsweie auf konstanter Höhe verlaufen.

Extrema:
Dazwischen je nach Situation: Definitionslücke, lokales (relativ zur Umgebung) Maximum (steigt-fällt), lokales Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt).
Die y-Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in den Original-Funktionsterm f(x) ganz oben.

Beispiel:
$f(x) = -x^4 + 2x^3$, $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f'(x) = 0$: $x^2(-4x + 6) = 0$; $x_{1/2} = 0$, $x_3 = 1{,}5$.

$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
steigt	0	steigt	1,5	fällt
	TerrP(0|0)		Max(1,5|1,6875)	

Damit erhält man für eine Zeichnung wertvolle Anhaltspunkte:



Eventuell könnten an den Rändern des Definitionsbereichs globale Maxima/Minima auftreten. Wäre hier im Beispiel $D_f = [-1; 2]$, so wäre $(-1|-3)$ als im ganzen Definitionsbereich tiefster Punkt ein globales Minimum.
Eigentlich sollte man beim x-Wert besser Maximal-/Minimalstelle, beim Punkt besser Hochpunkt/Tiefpunkt sagen.

Notwendige und hinreichende Bedingungen:
Sei f eine im Intervall $]a; b[$ differenzierbare Funktion.
Notwendige Bedingung: Wenn an einer in diesem Intervall liegenden Stelle x_0 ein lokales Extremum vorliegt, dann ist $f'(x_0) = 0$.
Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht, $f'(x_0) = 0$ ist also noch nicht hinreichend dafür, dass sich dort ein Extremum befindet (denn es könnte sich auch um einen Terrassenpunkt handeln), sondern es sind noch weitere Gesichtspunkte zu prüfen.
Hinreichend für ein Extremum ist z. B. dass zusätzlich ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung f' an dieser Stelle vorliegt.
Es können aber auch andere Situationen vorliegen, damit an einer Stelle x_0 relativ zu einer Umgebung U der höchste Punkt vorliegt, dass also $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U$ gilt, wenn z. B. keine Differenzierbarkeit vorliegt, wenn statt „streng monoton" nur „monoton" vorliegt oder Randextrema auftreten.