11. Klasse TOP 10 Mathematik — 11
Gesamtes Grundwissen mit Übungen — G

Grundwissen Mathematik 11. Klasse: Die 10 wichtigsten Themen auf jeweils einer Seite!

Zum Wiederholen kann man die Übungen des Kompakt-Überblicks verwenden.

11/1	Funktionseigenschaften	G	Ü	L
11/2	Verschieben und Strecken von Fkt.graphen	G	Ü	L
11/3	Gebrochen-rationale Funktionen	G	Ü	L
11/4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	G	Ü	L
11/5	Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit	G	Ü	L
11/6	Differenzieren	G	Ü	L
11/7	Ableitung, Tangenten	G	Ü	L
11/8	Monotonie, Extrema	G	Ü	L
11/9	Krümmung, Wendepunkte	G	Ü	L
11/10	Kurvendiskussion, Newton-Verfahren	G	Ü	L
11/K	Kompakt-Überblick zum Grundwissen	G	Ü	L

G=Grundwissen, Ü=Übungen, L=Lösungen

11. Klasse TOP 10 Grundwissen	**11**
Funktionseigenschaften	**01**

Grenzwerte im Unendlichen (d. h bei sehr großen x-Werten):
Vielen Funktionstermen sieht man das Verhalten für $x \to \pm\infty$ direkt an: So ist bei Polynomen die höchste Potenz (und deren Koeffizient) bestimmend; Exponentialfunktionen mit Basis $a > 1$ wachsen für $x \to +\infty$ ins Unendliche, mit $a < 1$ nähern sich deren Graphen der x-Achse. Brüche mit unendlich großem Nenner und endlichem Zähler gehen gegen 0.
Beispiele:
Für $h_1(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ gilt (wegen „x^4“) $\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) \to +\infty$.
Für $h_2(x) = -0{,}1x^3 + 16$ gilt (wegen „$-x^3$“) $\lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_2(x) \to -\infty$.
Für $h_3(x) = 1{,}04^x - 3$ gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_3(x) = -3$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_3(x) \to +\infty$.
Für $h_4(x) = -\frac{4}{x-1}$ gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_4(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_4(x) = 0$.
Bei Bruchfunktionen bietet sich an, mit der höchsten Potenz des Nenners zu kürzen.
Beispiele:

- $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$. Mit x^2 kürzen, d. h. Zähler und Nenner durch x^2 dividieren:
  $f(x) = \dfrac{x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}}{10 - \frac{10}{x^2}}$. Hier erkennt man nun, dass bei Einsetzen sehr großer x-Werte $\frac{16}{x^2}$ und $\frac{10}{x^2}$ gegen 0 gehen, so dass am verbleibenden Term das Verhalten für sehr große x-Werte bequem sichtbar ist: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-8}{10} \to \infty$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-1}{5x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}} = \frac{4}{5}$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-1}{5x^3+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x^3}} = 0$.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$
Beispiele:
$f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^4-8(-x)^2+16}{10(-x)^2-10} = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10} = f(x).$$

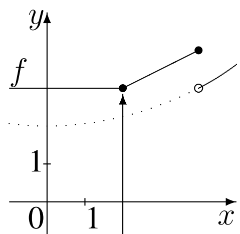
$h_5(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

$$h_5(-x) = \frac{(-x)^3-4(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3+4x}{x^2+1} = \frac{-(x^3-4x)}{x^2+1} = -\frac{x^3-4x}{x^2+1} = -h_5(x).$$

Falls Symmetrie vorliegt, erleichtert dies später oft die Arbeit, z. B. beim Berechnen von Funktionswerten.

Stetigkeit
Formal: An der zu betrachtenden Stelle nähern sich die Funktionswerte von links und von rechts dem gleichen Wert.
Anschaulich: Der Graph kann im Definitionsbereich ohne Absetzen des Schreibstiftes gezeichnet werden, macht also keine Sprünge. Für die bekannten Funktionstypen ist dies der Fall, zu prüfen ist die Nahtstelle bei abschnittsweise gegebenen Funktionen.
Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls } x \le 2 \\ 2 + 0{,}5x & \text{falls } 2 < x \le 4 \\ 2 + \frac{1}{16}x^2 & \text{falls } x > 4 \end{cases}$$



Einzusetzen ist für die Prüfung der Stetigkeit in den jeweils „zuständigen“ Term, also z. B. für „$x = 2$ von rechts“ in den mittleren Term des Bereichs $2 < x \le 4$:
Nahtstelle $x = 2$: $f(2) = 3$ (Funktionswert selbst als „Knödel“ in der Zeichnung),
von links: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 3$, von rechts: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 2 + 0{,}5 \cdot 2 = 3$: Stetig bei $x = 2$.
Nahtstelle $x = 4$: $f(4) = 2 + 0{,}5 \cdot 4 = 4$, von links: $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = 2 + 0{,}5 \cdot 4 = 4$,
von rechts: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 = 3 \ne 4$: Nicht stetig an der Stelle $x = 4$.

11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Verschieben und Strecken von Fkt.graphen — 02

Beispiel zu Parametern allgemein: $f_k(x) = kx^2 - 12x + 20$

Bei Funktionen mit Parameter ist zu unterscheiden zwischen der Variablen x und dem Parameter (hier k), der für eine Zahl steht. Je nachdem, welchen Wert man für den Parameter einsetzt, hat man einen anderen Funktionsgraphen mit anderen Eigenschaften:

Ist z. B. $k = 1$, so hat man den Funktionsterm $f_1(x) = x^2 - 12x + 20$ mit den zwei Nullstellen $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 8}{2} = 6 \pm 4$;

ist z. B. $k = 1{,}8$, so hat man $f_{1,8}(x) = 1{,}8x^2 - 12x + 20$ mit der doppelten Nullstelle $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1{,}8 \cdot 20}}{2 \cdot 1{,}8} = \frac{12 \pm 0}{3{,}6} = \frac{10}{3}$;

ist z. B. $k = 2$, so hat man $f_2(x) = 2x^2 - 12x + 20$ ohne Nullstellen (denn es wäre $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{-20}}{4}$ ↯);

ist z. B. $k = 0$, so hat man mit $f_0(x) = -12x + 20$ keine Parabel, sondern eine Gerade;

ist z. B. $k < 0$, so hat man eine nach unten geöffnete Parabel, die stets zwei Nullstellen $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot k \cdot 20}}{2 \cdot k}$ hat (denn wegen $k < 0$ ist stets $144 - 4 \cdot k \cdot 20 \geq 0$);

durch allgemeine Rechnung mit dem Parameter k erhält man die jeweils interessierenden Eigenschaften (also hier z. B., dass zwei Nullstellen für Diskriminante $144 - 4 \cdot k \cdot 20 \geq 0$, d. h. für $k \leq \frac{144}{4 \cdot 20} = 1{,}8$ vorliegen);

allen Funktionen f_k gemeinsam ist in diesem Beispiel der Punkt $(0|20)$ (denn bei Einsetzen von $x = 0$ in $f_k(x)$ erhält man stets den y-Wert 20).

Spezielle Parameter-Wirkungen: Verschiebungen und Streckungen

(weiteres Beispiel: → ueb104.pdf, Aufgabe 2)

Allgemeine Form mit Verschiebe- und Streckungsparameter, ausgehend von einer Funktion f:

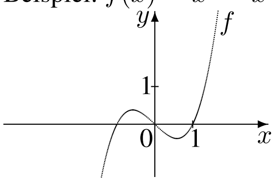
$$h(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$$

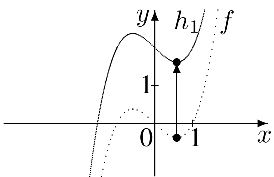
Man unterscheide dabei den „außen“ stehenden Faktor a und Summanden d, die den Graphen in y-Richung verändern, und den „innen“ bei x stehenden Faktor b und Summanden c.

- $+d$ bewirkt, dass alle y-Werte um d größer werden, d. h. der Funktionsgraph wird um d nach oben verschoben (bzw. bei negativem d nach unten).
- $\cdot a$ bewirkt, dass die y-Werte mit a multipliziert werden, d. h. der Funktionsgraph wird in y-Richtung um den Faktor a gestreckt (bzw. bei $|a| < 1$ gestaucht), bei negativem a zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.
- $\cdot b$ bewirkt, dass man für x jetzt das $\frac{1}{b}$-fache einsetzen muss, um das gleiche Ergebnis zu erhalten wie ohne diesen Faktor, d. h. der Graph wird in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$ gestaucht, bei negativem b zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.
- $+c$ bewirkt, dass für x jetzt um c weniger eingesetzt werden muss, um das gleiche Ergebnis zu erhalten wie ohne diesen Summanden, d. h. der Graph wird in x-Richtung um c nach links verschoben (bzw. bei negativem c nach rechts).

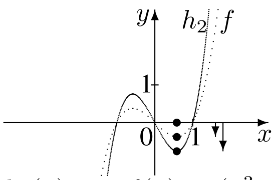
In Zweifelsfällen fertigt man am besten eine kleine Wertetabelle.

Beispiel: $f(x) = x^3 - x$

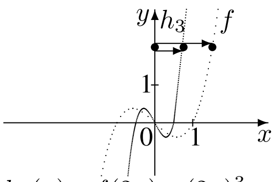




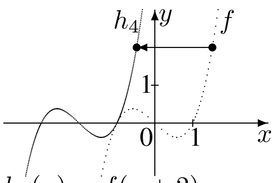
$h_1(x) = f(x) + 2 = x^3 - x + 2$



$h_2(x) = 2 \cdot f(x) = 2(x^3 - x)$



$h_3(x) = f(2x) = (2x)^3 - 2x$



$h_4(x) = f(x+2) =$
$= (x+2)^3 - (x+2)$

11. Klasse TOP 10 Grundwissen	**11**
Gebrochen-rationale Funktionen	**03**

Am Term schnell sichtbar sind die Definitionslücken (Nenner!), die Nullstellen (Zähler!) sowie das Verhalten im Unendlichen (Vergleich von Zähler- und Nennergrad).

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+2}$

Definitionslücke: Nenner $2x+2=0$ ergibt $x=-1$, also Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Nullstelle: $f(x)=0$ ergibt Zähler $x^2=0$, also $x_{1/2}=0$ (doppelt).

Verhalten in der Nähe der Definitionslücke:
Mit dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x)$ wird das rechts- bzw. linksseitige Verhalten der Funktion in der Nähe der Definitionslücken ermittelt, d. h. für x-Werte wie $-0{,}99$ („-1 plus ein bisschen") bzw. $-1{,}01$ („-1 minus ein bisschen").
Im Folgenden: Rechtsseitig (oberes Vorzeichen), linksseitig (unteres Vorzeichen)[1]:
Symbolisch notiert man[2]

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f(x) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Man denke sich } -1\pm 0 \text{ für } x \text{ eingesetzt}}}{\text{"}\frac{(-1\pm 0)^2}{-1\pm 0+1}\text{"}} = \text{"}\frac{+1}{\pm 0}\text{"} \to \pm\infty$$

Wichtig ist hierbei, das Vorzeichen im Nenner zu betrachten und sich klar zu machen, dass „2 geteilt durch eine sehr kleine Zahl sehr groß wird".

Bedeutung: Der Graph hat die senkrechte Asymptote $x=-1$, hier wegen des Nenners $2x+2=2(x+1)^1$ Pol erster Ordnung mit Vorzeichenwechsel (Vielfachheit der Polstelle $\to$ ueb113.pdf, Aufgabe 3).

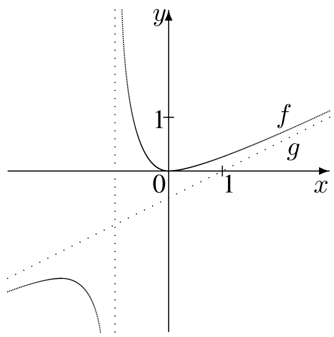
h**-Methode**:
Formal etwas sauberer als obige symbolische Notation ist das Einsetzen von $-1\pm h$ für x, wobei h „klein" ist:

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1\pm h) = \lim_{h\to 0}\frac{(-1\pm h)^2}{2(-1\pm h)+2} = \lim_{h\to 0}\frac{1\pm 2h+h^2}{\pm 2h} \to \pm\infty$$

(Hier sind wieder die Vorzeichen im Zähler ($+1$, der Rest spielt keine Rolle, da sehr klein) und Nenner ($\pm$) zu betrachten, um das Vorzeichen $\pm\infty$ zu ermitteln.)

Schräge Asymptote, wenn der Grad des Polynoms im Zähler um 1 größer als der Grad des Polynoms im Nenner ist:
Hierfür muss eine Umformung in „linearer Term plus Restterm" gegeben sein[3], welche umgekehrt durch Erweitern auf den gemeinsamen Nenner nachgewiesen werden kann:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+2} = \underbrace{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{2}{2x+2}}_{\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty}$$



Somit ist $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ der Term der schrägen Asymptote, an die sich der Graph im Unendlichen anschmiegt.
(Nachweis: $0{,}5x-0{,}5+\frac{1}{2x+2} = \frac{(0{,}5x-0{,}5)(2x+2)}{2x+2}+\frac{1}{2x+2} = \frac{x^2+x-x-1+1}{2x+2} = \frac{x^2}{2x+2}$).

Waagrechte Asymptote, wenn Grad des Zähler-Polynoms $\leq$ Grad des Nenner-Polynoms, z. B. $f(x)=\frac{4x-1}{5x+3}$ hat waagrechte Asymptote $y=\frac{4}{5}$ ($\to$ grund111.pdf), $f(x)=\frac{1-x}{0{,}5x^2-x-1{,}5}$ hat die x-Achse als waagrechte Asymptote.

---

[1] Es empfiehlt sich, zuerst „rechtsseitig" zu betrachten und dann für „linksseitig" mit Farbstift die Vorzeichen an den entsprechenden Stellen zu ändern.

[2] Für diese symbolische Notation ist manchmal ein Faktorisieren des Funktionsterms nötig, z. B. liefert bei $f(x)=\frac{1-x}{0{,}5x^2-x-1{,}5}$ die Lösungsformel für den Nenner $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5}}{2\cdot 0{,}5}$, $x_1=3$, $x_2=-1$, sodass man mit „x minus Lösung" schreiben kann: $f(x)=\frac{1-x}{0{,}5(x-3)(x+1)}$, vgl. auch ueb113.pdf, Aufgaben 1 und 2.

[3] Diese kann durch Polynomdividion gewonnen werden, siehe grund100.pdf, nicht im Lehrplan.

11. Klasse TOP 10 Grundwissen	11
Bedingte Wahrscheinlichkeit	**04**

Absolute und relative Häufigkeit → grund62.pdf,
Vierfeldertafel → grund95.pdf, zusammengesetzte Zufallsexperimente, Pfadregeln → grund102.pdf

Formel von Bayes

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Beispiel

Ein Bauunternehmer bezieht zum Terrassen-Pflastern 400 Steinplatten, und zwar zu $\frac{4}{5}$ Steinplatten I. Wahl (Anteil beschädigter Platten 5 %) und zu $\frac{1}{5}$ Platten II. Wahl (Anteil beschädigter Platten 15 %). Aus der Gesamt-Lieferung wird zufällig eine Platte herausgegriffen.
Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine beschädigte Platte aus der Lieferung I. Wahl? Oder anders formuliert: Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich unter der Bedingung, dass die Platte beschädigt ist, um eine Platte aus der I.-Wahl-Lieferung?

4-Felder-Tafel

Bei einer Aufteilung der Gesamtzahl nach mehreren Merkmalen kann man eine 4-Felder-Tafel erstellen, wobei die Zeilen bzw. Spalten jeweils mit Merkmal/nicht-Merkmal beschriftet werden und die Zahlen in jeder Zeile bzw. Spalte jeweils addiert werden (bzw. umgekehrt fehlende Felder auf diese Weise ergänzt werden).
In obigem Beispiel seien
W_1: „Die zufällig gezogene Platte ist aus der I.-Wahl-Lieferung“ und
B: „Die zufällig gezogene Platte ist beschädigt“.

4-Felder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten

	B	$\overline{B}$	
W_1	**16**	304	**320**
$\overline{W_1}$	**12**	68	**80**
	28	372	**400**

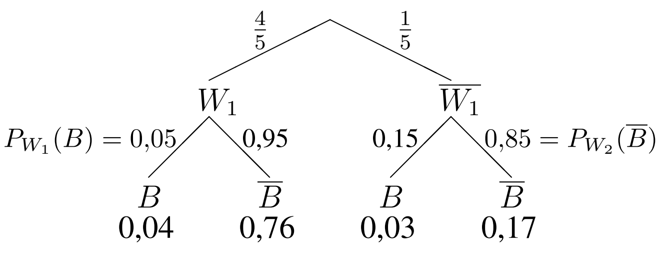
4-Felder-Tafel mit Wahrscheinlichkeiten

	B	$\overline{B}$	
W_1	**0,04**	0,76	**0,80**
$\overline{W_1}$	**0,03**	0,17	**0,20**
	0,07	0,93	**100 % = 1**

(Fett gedruckte Felder werden zuerst ausgefüllt (z. B. $320 = \frac{4}{5}$ von 400; im Feld $W_1 \cap B$: 5 % von $320 = 16$ bzw. 5 % von $\frac{4}{5} = 0{,}05 \cdot 0{,}80 = 0{,}04$), für den Rest entsprechende Zeilen- bzw. Spaltensummen betrachtet.)

Lösung der obigen Frage mit absoluten Häufigkeiten: Hat man eine der 28 beschädigten Platten vor sich, von denen 16 aus der Lieferung I. Wahl stammen, so erkennt man:
$P_B(W_1) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \approx 57\ \%$.
Lösung der obigen Frage mit Wahrscheinlichkeiten und der Formel von Bayes:
$P_B(W_1) = \frac{P(W_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}04}{0{,}07} = \frac{4}{7} \approx 57\ \%$.

Baumdiagramm



Bei den Beschriftungen der Äste der 2. Stufe B bzw. $\overline{B}$ handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten, z. B. Wahrscheinlichkeit für „beschädigt“ unter der Bedingung „I. Wahl“: $P_{W_1}(B) = 0{,}05$ usw.
Die unter den Pfaden stehenden Wahrscheinlichkeiten werden durch Anwendung der Pfadregeln (→ grund102.pdf) berechnet (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen): $P(W_1 \cap B) = P(W_1) \cdot P_{W_1}(B) = \frac{4}{5} \cdot 0{,}05 = 0{,}04$ usw.

Für das aus den Pfaden $W_1 - B$ und $\overline{W_1} - B$ zusammengesetzte Ereignis B gilt:
$P(B) = 0{,}04 + 0{,}03 = 0{,}07$.
Mit der Formel von Bayes berechnet man die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit:
$P_B(W_1) = \frac{P(W_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}04}{0{,}07} = \frac{4}{7} \approx 57\ \%$.

11. Klasse TOP 10 Grundwissen	11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit	**05**

Wiederholung von Grundbegriffen ($\rightarrow$ grund88.pdf, grund95.pdf, $\rightarrow$ ueb102.pdf):
Alle möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments werden als Elemente eines **Grundraums** Ω zusammengefasst.

Verknüpfte Ereignisse, Schreib- und Sprechweisen
$\overline{E} = \Omega \backslash E$ (Komplement, Gegenereignis, nicht-E)
$E_1 \cap E_2$ (E_1 und E_2, **beide** Ereignisse treten ein)
$E_1 \cup E_2$ (E_1 oder E_2; mindestens eines der Ereignisse tritt ein).
(In der Mathematik dürfen bei „oder" auch beide Ereignisse eintreten, sofern nichts anderes dasteht).
$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ (Höchstens eines der Ereignisse tritt ein)
$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$ (keines der Ereignisse tritt ein)
$(\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})$ (Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein)
$E_1 \cap E_2 = \{\}$ (E_1 und E_2 sind unvereinbar, disjunkt)
Stets gilt für die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen der Additionssatz ($\rightarrow$ gunrd95.pdf):
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Unabhängigkeit
Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Hinweise

- Falls A und B unabhängig sind, so gilt dies auch für die Komplemente.
- Wichtig ist die richtige Bildung von Komplementen, Beispiel: $\overline{\{\text{„Mindestens ein Treffer"}\}} = \{\text{„Kein Treffer"}\}$.
- Für **Laplace-Experimente** gilt $P(A) = \frac{|A|}{|B|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$ ($\rightarrow$ grund88.pdf).
- Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich oft (zumindest gedanklich) mit Baumdiagrammen veranschaulichen und mit den Pfadregeln berechnen ($\rightarrow$ grund102.pdf).
- Für Zufallsexperimente mit Betrachtung von Ereignissen A/nicht-A und B/nicht-B eignet sich oft neben dem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel, mit denen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ berechnen lassen ($\rightarrow$ grund95.pdf, grund114.pdf).
- Nach dem Gesetz der großen Zahlen pendelt sich bei n-maliger unabhängiger Durchführung desselben Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Ereignisses für $n \rightarrow \infty$ bei $P(E)$ ein ($\rightarrow$ grund88.pdf).

Beispiel:
Ein Oktaeder (beschriftet mit 1–8) und ein Würfel (1–6) werden unabhängig nacheinander geworfen. Betrachtet werden die Ereignisse
A: „Oktaeder zeigt eine Zahl ≥ 3",
B: „Würfel zeigt eine Zahl ≥ 3",
C: „Würfel zeigt eine Zahl ≤ 2",
D: „Beide zeigen eine Zahl ≥ 3",
E: „Oktaeder oder Würfel zeigt eine Zahl ≥ 3",
F: „Höchstens einer zeigt eine Zahl ≥ 3",
G: „Keiner zeigt eine Zahl ≥ 3",
H: „Genau einer zeigt eine Zahl ≥ 3",
I: „Augensumme 12",
J: „Oktaeder zeigt Primzahl".

$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,
$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,
$P(D) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2}$,
$P(E) = P(A \cup B) =$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{12}$
$P(F) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$
$P(G) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{12}$
$P(H) = P((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) =$
$= P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$
$= P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\overline{B}) = \frac{5}{12}$.

$P(I) = P(\text{„66, 75, 84"}) = \frac{3}{8 \cdot 6} = \frac{1}{16}$. $\quad P(J) = P(\text{„2, 3, 5, 7"}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
$P(I \cap J) = P(\text{„75"}) = \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{1}{48} \neq \frac{1}{32} = P(I) \cdot P(J)$, also I und J abhängig.

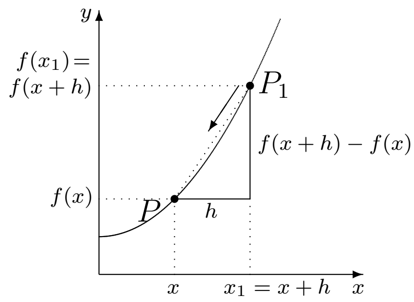
Zweck: Das Differenzieren (Ableiten) einer Funktion f dient zur Betrachtung lokaler Änderungsraten, d. h. zur Bestimmung der Steigung eines Funktionsgraphen.

Während man mit der Sekante zwischen zwei Graphen-Punkten $P(x|f(x))$ und $P_1(x_1|f(x_1))$ mit Hilfe des **Differenzenquotienen**

$$\overline{m} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

nur die durchschnittliche Änderung von $f(x)$ pro „Zeitabschnitt“ $x_1 - x$ erhält, erhält man die lokale Änderungsrate, d. h. die Steigung der Tangente an der Stelle x, wenn man den Punkt P_1 immer näher zum Punkt P schiebt; d. h. die Tangentensteigung ist gegeben durch

$$m = \lim_{x_1 \to x \pm 0} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$



bzw. anders ausgedrückt, indem man den Abstand h zwischen den betrachteten x-Werten „infinitesimal klein“ macht:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}.$$

Die **Ableitungsfunktion** f' gibt zu jedem x-Wert die Steigung m an dieser Stelle an:

$$f'(x) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}.$$

Interpretation als Änderungsrate: Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$
Ort zur Zeit x	Geschwindigkeit zur Zeit x
Anzahl Scheidungen bis zum Jahr x	Scheidungsrate (Scheidungen pro Jahr) im Jahr x

Ableitung von Potenzfunktionen:

$f(x)$	Konstante c	x	x^2	x^3	x^n
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}

(„alter Exponent ’runter, neuer um 1 kleiner“)

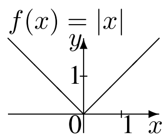
Konstanten fallen bei Addition weg und bleiben bei Multiplikation erhalten; Summen und Differenzen können gliedweise differenziert werden, z. B.

$f(x) = x^4 + 7 \qquad f'(x) = 4x^3$
$f(x) = 7x^4 \qquad f'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$
$f(x) = 7x^4 + x^2 \qquad f'(x) = 28x^3 + 2x$

Differenzierbarkeit

Die Tangentensteigung an einer Stelle kann nicht bestimmt werden, wenn der Funktionsgraph nicht glatt verläuft, sondern dort Sprünge oder Knicke aufweist. Die Funktion ist dann nicht differenzierbar an dieser Stelle.

Beispiel: Betragsfunktion $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$



Wenn eine Funktion nicht stetig ist, dann ist sie auch nicht differenzierbar.

11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Ableitung, Tangenten — 07

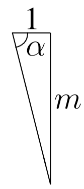
Berechnung der Ableitungsfunktion $f'(x) \to$ grund116.pdf.
Graphisches Differenzieren $\to$ ueb116.pdf, Aufgabe 6.

Tangenten an den Funktionsgraphen von f im Punkte $P(x|y)$:
Zunächst bestimmt man den y-Wert durch Einsetzen von x in $f(x)$.
Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + t$
Die Steigung m erhält man mit der Ableitung an der Stelle x: $m = f'(x)$.
Den y-Achsenabschnitt t erhält man durch Einsetzen der Punktkoordinaten.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 8x + 1$, $P(2|?)$.
y-Wert: $f(2) = -11$, also $P(2|-11)$.
Steigung: $f'(x) = 2x - 8$, $f'(2) = -4$. Also Tangente: $y = -4x + t$.
P einsetzen: $-11 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -3$. Also Tangente: $y = -4x - 3$.

Zum Aufstellen der Tangentengleichung an der Stelle x_0 könnte man auch direkt die Formel $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ verwenden.

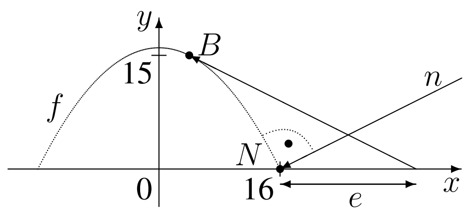
Den **Schnittwinkel** α einer Geraden $g(x) = mx + t$ mit der x-Achse und den **Neigungswinkel der Tangente** erhält man mit $m = \tan\alpha$.
Mit der SHIFT-tan- bzw. INV-tan-Funktion des Taschenrechners erhält man dann α.



Beispiel: $g(x) = -4x - 3$. $m = -4 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha \approx -75{,}96°$.

Normale: Unter einer Normalen versteht man in der Mathematik eine senkrecht stehende Gerade. Zu einer vorgegebenen Steigung m_1 erhält man die Steigung m_2 der Normalen mit der Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Beispiel-Aufgabe:
Es gibt Gebäude in Form einer Parabel, z. B. der Bahnhof von Eskişehir in der Türkei. Es wird angenommen, dass die Gleichung des parabelförmigen Dachs durch $f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + 16$ gegeben ist.
Zu berechnen sind (vgl. Skizze):



1. Die Entfernung e, in der man mindestens stehen muss, um bis zu einer Höhe von $y = 15$ das Dach sehen zu können;

2. Die Gleichung der Normalen n, falls man senkrecht zur Dachfläche auf den Boden-Punkt N blickt.

Lösungen:

1. Tangente im Punkt $B(?|15)$:
   $f(x) = 15$; $-\frac{1}{16}x^2 + 16 = 15$; $\frac{1}{16}x^2 = 1$; $x = \pm 4$, also $B(4|15)$.
   $f'(x) = -\frac{1}{16} \cdot 2x = -\frac{1}{8}x$, $m = f'(4) = -\frac{1}{8} \cdot 4 = -\frac{1}{2}$.
   Tangtenten-Ansatz: $y = mx + t$, hier also $y = -\frac{1}{2}x + t$.
   B einsetzen: $15 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + t$. $t = 17$. Tangente somit: $y = -\frac{1}{2}x + 17$.
   Schnitt der Tangente mit der x-Achse: $0 = -\frac{1}{2}x + 17$; $x = 34$.
   Abstand e zur Parabel-Nullstelle somit: $e = 34 - 16 = 18$.

2. Tangentensteigung im Punkt $N(16|0)$: $m_t = f'(16) = -\frac{1}{8} \cdot 16 = -2$.
   Normalensteigung wegen $m_t \cdot m_n = -1$ ist $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.
   Normalen-Ansatz: $y = mx + t$, hier also $y = \frac{1}{2}x + t$.
   N einsetzen: $0 = \frac{1}{2} \cdot 16 + t$. $t = -8$. Normale somit: $y = \frac{1}{2}x - 8$.

11. Klasse TOP 10 Grundwissen	11
Monotonie, Extrema	**08**

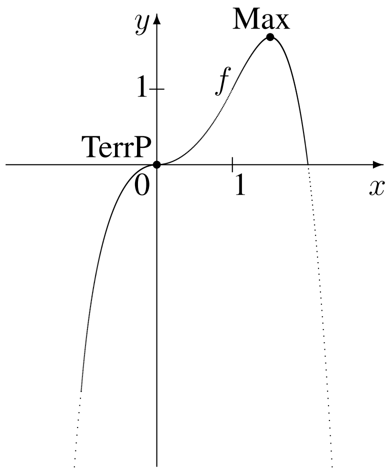
Monotonie:
$f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f' ermitteln ($\rightarrow$ grund106.pdf, dabei auch eventuelle Definitionslücken markieren).
Strenge Monotonie: $f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.
Nur von „monoton steigend“ kann gesprochen werden, wenn immer weiter rechts der Graph höher oder mindestens gleich hoch liegt, wenn also für $x_2 > x_1$ dann $f(x_2) \geq f(x > 1)$ gilt (während für „streng monoton steigend“ der Graph weiter rechts echt höher liegen muss, also $f(x_2) > f(x_1)$ gelten muss). In diesem Fall einfacher Monotonie könnte ein Graph z. B. abschnittsweie auf konstanter Höhe verlaufen.

Extrema:
Dazwischen je nach Situation: Definitionslücke, lokales (relativ zur Umgebung) Maximum (steigt-fällt), lokales Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt).
Die y-Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in den Original-Funktionsterm f(x) ganz oben.

Beispiel:
$f(x) = -x^4 + 2x^3$, $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f'(x) = 0$: $x^2(-4x + 6) = 0$; $x_{1/2} = 0$, $x_3 = 1{,}5$.

$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
steigt	0	steigt	1,5	fällt
	TerrP(0|0)		Max(1,5|1,6875)	

Damit erhält man für eine Zeichnung wertvolle Anhaltspunkte:



Eventuell könnten an den Rändern des Definitionsbereichs globale Maxima/Minima auftreten. Wäre hier im Beispiel $D_f = [-1; 2]$, so wäre $(-1|-3)$ als im ganzen Definitionsbereich tiefster Punkt ein globales Minimum.
Eigentlich sollte man beim x-Wert besser Maximal-/Minimalstelle, beim Punkt besser Hochpunkt/Tiefpunkt sagen.

Notwendige und hinreichende Bedingungen:
Sei f eine im Intervall $]a; b[$ differenzierbare Funktion.
Notwendige Bedingung: Wenn an einer in diesem Intervall liegenden Stelle x_0 ein lokales Extremum vorliegt, dann ist $f'(x_0) = 0$.
Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht, $f'(x_0) = 0$ ist also noch nicht hinreichend dafür, dass sich dort ein Extremum befindet (denn es könnte sich auch um einen Terrassenpunkt handeln), sondern es sind noch weitere Gesichtspunkte zu prüfen.
Hinreichend für ein Extremum ist z. B. dass zusätzlich ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung f' an dieser Stelle vorliegt.
Es können aber auch andere Situationen vorliegen, damit an einer Stelle x_0 relativ zu einer Umgebung U der höchste Punkt vorliegt, dass also $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U$ gilt, wenn z. B. keine Differenzierbarkeit vorliegt, wenn statt „streng monoton“ nur „monoton“ vorliegt oder Randextrema auftreten.

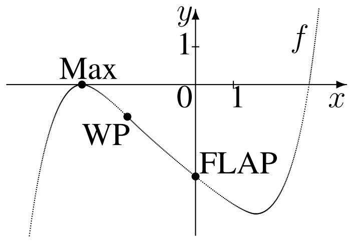
11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Krümmung, Wendepunkte — 09

Krümmung und Wendepunkte
$f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln ($\rightarrow$ grund106.pdf, dabei ggf. auch Definitionslücken markieren)
Krümmung: $f'' > 0$: Graph ist in diesem Bereich linksgekrümmt; $f'' < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen bei $f''(x) = 0$: **Flachpunkt**; bei Vorzeichenwechsel von f'' sogar **Wendepunkt**; wenn zusätzlich zum Vorzeichenwechsel dort $f'(x) = 0$: **Terrassenpunkt**.
Die y-Koordinate dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in $f(x)$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9) = \frac{1}{100}(x^5+3x^4-81x-243)$
$f'(x) = \frac{1}{100}(5x^4+12x^3-81)$
$f''(x) = \frac{1}{100}(20x^3+36x^2)$
$f''(x) = 0$: $\frac{1}{100}x^2(20x+36) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -1{,}8$.

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' > 0$	
rechts-	$-1{,}8$	links-	0	links-	gekrümmt
	WP$(-1{,}8\|y)$		FLAP$(0\|0)$		

mit $y = f(-1,8) \approx -0{,}85$



Unter einer **Wendetangente** versteht man die Tangente im Wendepunkt.

Kriterium für Extrema ($\rightarrow$ grund118.pdf) mit Hilfe der zweiten Ableitung f'':
Bekanntlich genügt $f'(x) = 0$ noch nicht für das Vorliegen eines Extremums, sondern es muss noch ein Vorzeichenwechsel (VZW) von f' vorliegen. Alternativ zur Vorzeichenbetrachtung kann man die in Frage kommenden x-Werte in $f''(x)$ einsetzen. Ist dann an einer solchen Stelle $f''(x) > 0$, so ist dort der Graph linksgekrümmt, d. h. es handelt sich um ein Minimum, bei $f''(x) < 0$ entsprechend um ein Maximum.
Ist an einer solchen Stelle $f''(x) = 0$, so muss man doch die Vorzeichenbereiche untersuchen.
In obigem Beispiel $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9)$ ist
$f'(-3) = \frac{1}{100}(5\cdot(-3)^4 + 12\cdot(-3)^3 - 81) = 0$ und
$f''(-3) = \frac{1}{100}(20\cdot(-3)^3 + 36\cdot(-3)^2) = -2{,}16 < 0$ und daher $x = -3$ eine Maximalstelle.

11. Klasse TOP 10 Grundwissen | 11
Kurvendiskussion, Newton-Verfahren | 10

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Ziel: Zu einem gegebenen Funktionsterm $f(x)$ sollen möglichst viele charakteristische Eigenschaften des Funktionsgraphen gefunden werden.

Definitionsbereich (maximaler): Bei ganzrationalen Funktionen $D = \mathbb{R}$
(Kritisch sind bei anderen Funktionstypen: Brüche: Nenner gleich 0 setzen, liefert Definitionslücken. Wurzeln: Radikand ≥ 0 setzen, liefert Definitionsbereich. Logarithmen: Numerus > 0 setzen, liefert Definitionsbereich).

Asymptoten kann es bei anderen Funktionstypen (z. B. $\to$ grund113.pdf) an den Rändern des Definitionsbereichs geben, d. h. zu bilden sind $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (eventuelle waagrechte Asymptoten) bzw. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (eventuelle senkrechte Asymptoten an den Definitionslücken).

Bei ganzrationalen Funktionen ergibt sich der prinzipielle Verlauf im Unendlichen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ aus der höchsten Potenz und deren Koeffizient.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$

Nullstellen sind Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

Exrema und Monotonie: $f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f' ermitteln („Methode mit dem Strich“ siehe Grundwissen 10/7, dabei auch Definitionslücken markieren).
$f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.
Dazwischen je nach Situation: Maximum (steigt-fällt), Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt), bei anderen Funktionstypen eventuell Definitionslücken.
Die y-Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in $f(x)$ ganz oben.

Wendepunkte und Krümmung: $f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Wiederum Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln.
$f''(x) > 0$: Graph linksgekrümmt in diesem Bereich; $f''(x) < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen je nach Situation: Wendepunkt (bei Wechsel der Krümmung), Flachpunkt, eventuell Definitionslücke. y-Koordinaten wieder durch Einsetzen in $f(x)$ ganz oben.

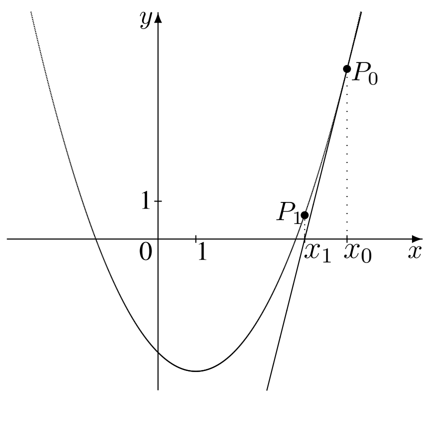
Skizze: Der Graph kann nun anhand der bisherigen Daten skizziert werden. Auch wenn man einzelne Teile der Kurvendiskussion nicht bearbeiten konnte, ist eine Skizze mit Hilfe einer Wertetabelle stets möglich! Für einige x-Werte (z. B. 0 oder ± 1 oder bei Symmetrie) ist die Berechnung von f(x) ganz einfach; bei $x = 0$ erhält man den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Wertebereich: Dieser kann mit Hilfe der Skizze leicht bestimmt werden, indem man betrachtet, welche y-Werte beim Graphen vorkommen können. (Hält man das Lineal parallel zur x-Achse und schiebt man es von unten nach oben durch, so sieht man, welche dieser Parallelen vom Graphen geschnitten wird und welche y-Werte somit vorkommen).

Newton-Verfahren:

Zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen wird folgende Iterations-Idee verwendet:

- Wahl eines geeigneten Startwertes x_0.
- Berechnung der Tangente t im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$:
  $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
- Berechnung der Nullstelle x_1 der Tangente:
  $t(x) = 0$ liefert $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  In der Regel ist x_1 ein besserer Näherungswert für die gesuchte Nullstelle von f (siehe Abb.).
- Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens mit x_1 usw. als neuem Startwert.



11. Klasse TOP 10 Grundwissen | 11

Kernsätze | K

Blatt auf DIN A 3 vergrößern, Karteikarten ausschneiden und Rückseite an Rückseite zusammenkleben!

Funktionseigenschaften
111

Wie ergibt sich $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ bei Polynomen, z. B. $f(x)=-2x^5+x^3$, bzw. Bruchfkten, z. B. $h(x)=\frac{2x}{x+3}$?
Wie beweist man Achsensymmetrie zur y-Achse/Punktsymm.?
Was ist Stetigkeit an Nahtstellen?

Verschieben und Strecken
112

Welche Wirkung haben die Parameter a, b, c, d in
$h(x)=af(b(x+c))+d$?

Gebrochen-rationale Fkten
113

Wann gibt es waagrechte/schräge Asymptoten? Wie müsste z. B. bei $f(x)=\frac{x-3}{(x-1)^n}$ die Zahl n jeweils gedeutet werden?
Wie untersucht man z. B. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{x-3}{(x-1)^2}$?

Bedingte Wahrscheinlichkeit
114

Wie berechnet man die bed. W. von A unter der Bedingung B?
Welche Techniken gibt es zur Behandlung von Zufallsexperimenten, in denen mehrere Eigenschaften A und B betrachtet werden?

Wahrscheinlichkeit, Unabh.
115

Wie werden $A\cap B$ und $A\cup B$ umgangssprachlich formuliert?
Was sind die Komplemente von A_1 (A_{18}): „Mindestens 1 (18) Jahre“?
Welche Formeln gibt es für $P(\overline{A})$, $P(A\cup B)$, für Unabhängigkeit?

L111

Polynome: Höchste Potenz, z. B. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2x^5+x^3)\to\mp\infty$.
Brüche: Mit Nenner-x^n kürzen, z. B. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{x}}=2$.
Achsensymm.: $f(-x)=f(x)$.
Punktsymm.: $f(-x)=-f(x)$.
Stetig, wenn keine Sprünge.

L112

a: Streckung in y-Richtung
b: Stauchung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$
(falls negativ, zusätzlich Spiegelung)
c: Verschiebung nach links
d: Verschiebung nach oben

L113

Waagr.: „Zählergrad<Nennergrad“, schräge Asymptote: „Zählergrad = Nennergrad+1“.
In $\frac{x-3}{(x-1)^n}$ ist n die Ordnung der Polstelle (z. B. $n=2$: Kein Vorzeichenwechsel)
$\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{x-3}{(x-1)^2}=\text{"}\frac{-2}{+0}\text{"}\to-\infty$

L114

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
Techniken: Vierfeldertafel, Baumdiagramm, Formeln.

	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$			
			1

L115

$A\cap B$: A und B (also beide).
$E=A\cup B$: A oder B (oder beide).
$\overline{A_1}$: „Kein Jahr“,
$\overline{A_{18}}$: „Höchstens 17 Jahre“.
$P(\overline{A})=1-P(A)$
$P(E)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
Unabh.: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Differenzieren
116

Welche anschauliche Bedeutung hat die Ableitung $f'(x)=\lim\limits_{h\to}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$?
Nach welcher Regel wird $f(x)=x^n$ differenziert, z. B. $h(x)=2x^4-3x^2-7x+3{,}5$

Ableitung, Tangenten
117

Wie stellt man die Gleichung der Tangente an eine Funktion f in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ auf?
Wie berechnet man den Neigungswinkel α der Tangente?
Je größer die f'-Werte, desto …

Monotonie, Extrema
118

Wie untersucht man eine Funktion auf Monotonie und Extrema?

Krümmung, Wendepunkte
119

Wie untersucht man eine Funktion auf Krümmung und Wendepunkte?

Kurvendiskussion, Newton-Verf.
110

Welche Informationen werden bei einer Kurvendiskussion betrachtet?
Newton-Verfahren: Wozu dient die Formel $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$?

L116

Die Ableitung gibt die lokale Änderungsrate und somit die Steigung von f an.
$f(x)=x^n$: „Alter Exponent 'runter, neuer ist um 1 kleiner.“
$h'(x)=8x^3-6x-7$

L117

Tangenten-Ansatz $y=mx+t$ mit $m=f'(x_0)$, t durch Einsetzen von P.
$m=\tan\alpha$
… desto steiler der Graph von f.

L118

$f'(x)=0$ lösen, Vorzeichenbereiche für Steigen/Fallen.
$f'>0$: f steigt streng monoton.
Lokale Extrema, wenn Vorzeichenwechsel, sonst Terrassenpunkt

L119

$f''(x)=0$ lösen und Vorzeichenbereiche betrachten ($f''>0$: linksgekrümmt), Stelle mit Krümmungswechsel ist WP.

L110

Kurvendisk.: D_f, Asymptoten, Symm., Nst, f' (Monotonie und Extrema), f'' (Krümmung und Wendepunkte), Skizze, W_f.
Newton-Verfahren ergibt Näherungswert für Nullstelle durch Betrachtung der Tangente.

11. Klasse Übungsaufgaben	11
Funktionseigenschaften	**01**

1. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:
   (a) $f(x) = x^5 - 4x^4$ (b) $f(x) = -x^6 + 3x$
   (c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{-2x+1}$ (d) $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-2x+1}$
   (e) $f(x) = -3 \cdot 0{,}1^x$ (Tipp für $x \to -\infty$: Siehe Teilaufgabe (h))
   (f) $f(x) = 10^x + 0{,}3$ (g) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} - 5$
   (h) In den meisten der vorhin beschriebenen Aufgaben kann auch mit Hilfe des Taschenrechners durch Einsetzen einer sehr großen Zahl (z. B. 1 000 000) eine Vorstellung vom Grenzwert für $x \to \infty$ gewonnen werden. Betrachten Sie nun jedoch folgendes Beispiel, bei dem Vorsicht geboten ist:
   $f(x) = x^2 - 10^{-10} \cdot x^3$

2. Untersuchen Sie auf Achsensymmetrie (A) zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie (P) zum Nullpunkt (Ursprung) des Koordinatensystems:
   (a) $f(x) = x^{11} - x^5 + 2x$
   (b) $f(x) = x^6 - 9x^4$ (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x(x^3-3x)}$ (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2-3x)}$

   Für die sin- und cos-Funktion gelten: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.
   Welche Symmetrieeigenschaft haben demnach
   (e) die sin- und cos-Funktion,
   (f) die durch $f(x) = (\sin x \cdot \cos x)^3$ gegebene Funktion?

3. Berechnen Sie für $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, die Nullstelle und $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

   Begründen Sie durch Einsetzen von x-Werten wie 2,99 oder 3,01, welches Verhalten der Funktionsgraph in der Nähe der Definitionslücke zeigt.

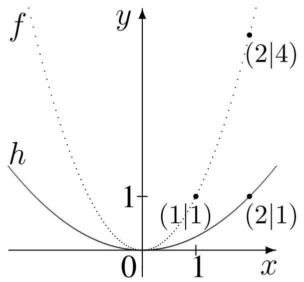
   Fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen.

   Berechnen Sie, ab welcher Stelle x_0 sich der Graph der waagrechten Asymptote $y = a$ um weniger als 0,1 nähert, so dass also $|f(x) - a| < 0{,}1$ für $x > x_0$.

4. Untersuchen Sie auf Stetigkeit:
   (a) $f(x) = |2x+10| = \begin{cases} -2x-10 & \text{falls } x < -5 \\ 2x+10 & \text{falls } x \geq -5 \end{cases}$
   (b) (Preis pro Einheit 0,19 bis 1000 Einheiten, darüber 0,15 plus Grundgebühr g):
   $f(x) = \begin{cases} 0{,}19x & \text{falls } x \leq 1000 \\ g + 0{,}15x & \text{falls } x > 1000 \end{cases}$
   (Ergebnis je nach Wert des Parameters g!)

11. Klasse Übungsaufgaben	11
Verschieben und Strecken von Fkt.graphen	**02**

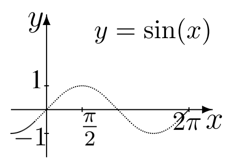
1. Der nebenstehende Graph der Funktion h geht aus der Normalparabel $f(x) = x^2$ durch eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung hervor, man kann aber h auch durch eine Streckung in x-Richtung gewinnen. Geben Sie den Term von h an und beschreiben Sie beide Streckungen.



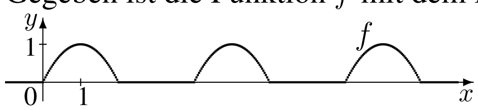
2. Die Funktion mit $h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ geht aus $f(x) = x^3$ durch Verschiebung in x-Richtung und anschließende Verschiebung in y-Richtung hervor. Um wie viele Einheiten muss jeweils verschoben werden?

   Anleitung: Den Ansatz $h(x) = (x + c)^3 + d$ ausmultiplizieren und mit dem oben gegebenen Term vergleichen.

3. Erstellen Sie schrittweise ausgehend vom Graphen der sin-Funktion die Graphen zu den Funktionsgleichungen $y = \sin(2x)$, $y = \sin(2(x + \frac{\pi}{4}))$, $y = -1{,}5 \sin(2(x + \frac{\pi}{4}))$ und $y = -1{,}5 \sin(2(x + \frac{\pi}{4})) + 2$.



4. Gegeben ist die Funktion f mit dem folgenden Graphen:



   Skizzieren Sie den Graphen zu $h(x) = -2f(\frac{1}{3}x + 1)$.

5. Durch $g_a(x) = (7 - a)x + \frac{1}{2}a$ ist eine Geradenschar mit dem reellen Parameter a gegeben.

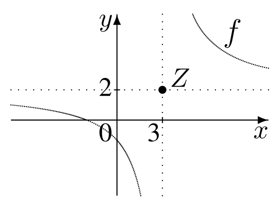
   (a) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Lage der Nullstelle. Für welchen Wert von a gibt es keine Nullstelle?

   (b) Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit der Punkt $(2011|2014)$ auf dem Graphen liegt?

   (c) Zeigen Sie, dass sich alle Graphen der Schar in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

   Anleitung: Bestimmen Sie den Schnittpunkt von zwei speziellen Graphen der Schar, z. B. g_0 und g_2, und zeigen Sie, dass dieser auf allen Geraden liegt.

6. Gegeben ist $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ mit dem nebenstehenden Graphen (vgl. ueb111.pdf, Aufgabe 3).
   Entnehmen Sie der Skizze, zu welchem Punkt $Z(a|b)$ der Graph punktsymmetrisch ist.
   Verschieben Sie die Funktion um a nach links und um b nach unten und beweisen Sie für die verschobene Funktion die Punktsymmetrie zum Ursprung.



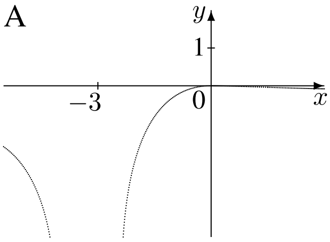
11. Klasse Übungsaufgaben — 11
Gebrochen-rationale Funktionen — 03

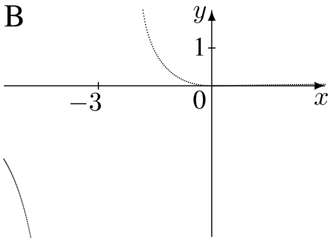
Weitere Beispiele und Aufgaben → grund85.pdf, ueb85.pdf.

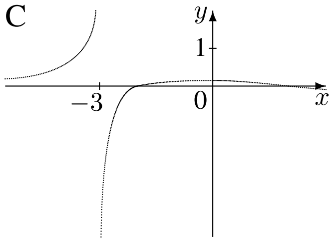
1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+5x}$.
   Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x)$.
   Fertigen Sie eine grobe Skizze des Funktionsgraphen.

2. Ermitteln Sie charakteristische Eigenschaften des Graphen:
   $f(x) = \dfrac{1-x}{0{,}5x^2 - x - 1{,}5}$

3. Formulieren Sie, was die Vielfachheit einer Polstelle über Vorzeichenwechsel an dieser Stelle bedeutet. Untersuchen Sie die folgenden Beispiele:
   (a) $f_1(x) = \dfrac{-x^2}{3x^2+18x+27}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{x^2}{(x+3)^3}$ (c) $f_3(x) = \dfrac{4-x^2}{x^3+27}$
   Ordnen Sie die folgenden Graphen diesen drei Funktionstermen zu:

A


B


C


4. Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion an mit folgenden Eigenschaften: $x = 2$ ist Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, $y = 3$ ist waagrechte Asymptote, es gibt keine Nullstellen, die y-Achse wird bei $y = 6$ geschnitten.

5. Geben Sie alle Asymptoten an:
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+8x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+8x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3+8x}{x^2-4} = x + \dfrac{12x}{x^2-4}$
   (Überzeugen Sie sich davon, dass die hier angegebene Umformung richtig ist!)
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{2} + 3x$ (e) $f(x) = \dfrac{7x^2-6x-3}{2x}$

6. Gegeben ist die Funktionenschar mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = \dfrac{-2x^2+50}{x^2+a}$.
   (a) Untersuchen Sie f_a auf Definitionsbereich und Nullstellen.
   Geben Sie den Schnittpunkt Y_a mit der y-Achse an.
   (b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f(x)$, sofern $a < 0$.
   (c) Fertigen Sie eine Skizze der Funktionsgraphen für $a = -25$, $a = -16$ und $a = 25$.

11. Klasse Übungsaufgaben — 11

Bedingte Wahrscheinlichkeit — 04

1. Erstellen Sie eine 6-Felder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten:
   28 Schülerinnen und 26 Schüler wählen eine Sportart. 14 Buben und Mädchen möchten Schwimmen, zwei Fünftel der übrigen Fußball spielen und der Rest laufen. Beim Fußball sind nur 2 Mädchen, dagegen beim Schwimmen nur 2 Buben.

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen Fußball spielen möchte.
   Zeigen Sie, dass das Geschlecht einen Einfluss auf die Fußball-Leidenschaft hat.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand aus der Fußball-Gruppe aus der Gruppe der Mädchen stammt.

2. Die Tabelle beschreibe, wie viele von anfangs 100 Leuchtstoffröhren durchschnittlich nach t Tagen Brenndauer noch voll funktionsfähig sind.

t	0	100	200	300
Zahl	100	61	35	18

   (a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine neue Leuchtstoffröhre demnach weniger als 200 Tage überlebt.

   (b) Berechnen Sie für $b = 0, 100, 200$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Leuchtstoffröhre, die schon b Tage überlebt hat, die nächsten 100 Tage auch noch überlebt. Interpretieren Sie einen Vergleich dieser Daten.

3. Gegeben sind Ereignisse A, B mit $P(A) = 0{,}72$, $P(A \cap B) = 0{,}18$, $P(A \cup B) = 0{,}832$.
   Ermitteln Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$ und $P_{\overline{A}}(B)$.

4. (Aus dem Leistungskurs-Abitur Bayern 2008/IV)
   In einem Molkereibetrieb wird Fuchtjoghurt hergestellt und in Becher abgefüllt. In dem Betrieb werden täglich gleich viele Becher der Sorten Erdbeere, Kirsche, Heidelbeere und Ananas abgefüllt. Bei einer Tagesproduktion, bei der 4 % der Becher einen defekten Deckel aufweisen, fällt auf, dass unter den Erdbeerjoghurtbechern sogar jeder zehnte Deckel fehlerhaft ist.

   (a) Bestimmen Sie den Anteil der Becher mit defektem Deckel unter allen Bechern, die keinen Erdbeerjoghurt enthalten.

   Klären Sie, ob es durch Absenken des Ausschussanteils allein beim Erdbeerjoghurt gelingen kann, den angestrebten Qualitätsstandard von insgesamt höchstens 1 % Ausschussanteil einzuhalten.

   (b) Alle Becher mit defektem Deckel dieser Tagesproduktion werden aussortiert. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Becher, der zufällig aus den verbleibenden Becher ausgewählt wird, Erdbeerjoghurt enthält.

5. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch (11, 22, ..., 66) zu erhalten, beträgt bekanntlich $\frac{1}{6}$.

   (a) Es wird 4-mal hintereinander jeweils mit 2 Würfeln gewürfelt.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt genau 3-mal Pasch fällt, wenn bekannt ist, dass mindestens einmal Pasch dabei war.
   Angenommen, Pasch fällt insgesamt genau 3-mal; ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dann diese drei Pasch-Würfe hintereinander waren.

   (b) Berechnen Sie, wie oft man würfeln müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für „mindestens einmal Pasch“ mindestens 99 % beträgt.

11. Klasse Übungsaufgaben — 11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 05

1. Beschreiben Sie kurz, woran man Unabhängigkeit von Ereignissen
   (a) in einer Vierfeldertafel,
   (b) im Baumdiagramm

   erkennt.

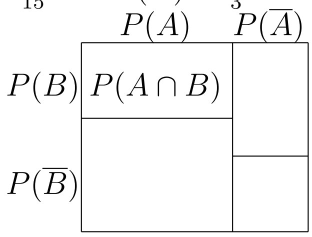
2. Bei einer Verkehrskontrolle wird ein Fahrrad zufällig herausgegriffen und auf Funktionsfähigkeit von Vorder- bzw. Rücklicht untersucht. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwar das Vorder-, aber nicht das Rücklicht funktioniert, betrage $0{,}057$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Fahrrad mit defektem Rücklicht herauszugreifen, sei $0{,}06$.
   (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Lichter defekt ist, sei $0{,}09$. Zeigen Sie, dass dann in Hinblick auf die Funktionsfähigkeit Vorder- und Rücklicht nicht unabhängig sind.
   (b) Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen der beiden Defekte sein müsste, damit sich Unabhängigkeit ergibt.

3. Es werden die Essenswünsche der Besucher einer Kantine betrachtet, in der unter anderem Currywurst angeboten wird. Sei E_i: „Spätestens der i-te Besucher wünscht Currywurst“. Es sei $P(E_i) = 1 - 0{,}6^i$.

   Formulieren Sie $\overline{E_3}$ und $\overline{E_3} \cap E_4$ in Worten; berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

4. Für zwei Ereignisse A und B gelte $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie $P(A \cup B)$.

   Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in einem Diagramm der nebenstehenden Art dar, in dem die Wahrscheinlichkeiten durch entsprechend große Flächeninhalte wiedergegeben sind. Woran erkennt man, ob Unabhängigkeit vorliegt?



5. (Aus dem Abitur 1988)

   Zu jedem Ziffernschloss gehört eine „Geheimzahl“, mit der das Schloss geöffnet werden kann. Im Folgenden werden als Geheimzahlen vierstellige Zahlen verwendet, die aus den Ziffern 1 bis einschließlich 7 gebildet werden können. Dabei wird die Produktion so gesteuert, dass alle möglichen Geheimzahlen gleichwahrscheinlich sind.

   Betrachtet werden die Ereignisse

   Z: „Die Geheimzahl enthält genau zwei gleiche Ziffern“ und

   U: „Die Geheimzahl besteht nur aus ungeraden Ziffern“

   (a) Berechnen Sie $P(Z)$.
   (b) Sind die Ereignisse Z und U unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Element aus U, wenn man nur aus den Elementen von Z zufällig auswählt?

11. Klasse Übungsaufgaben — 11
Differenzieren — 06

1. Gegeben sind die folgenden Funktionsterme:

   - $f_1(x) = x^4 - 16$
   - $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$
   - $f_3(x) = 11$
   - $f_4(x) = (x-1)(x^2+x+7)$ (Vorsicht: Produkte erfordern [mit bisherigem Wissen] vor dem Differenzieren ein Ausmultiplizieren)

   (a) Berechnen Sie die Ableitungen.

   (b) Berechnen Sie die Steigung der Tangenten in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

2. Untersuchen Sie in den folgenden Fällen die Bedeutung der Ableitung f':

   (a) $f(x) =$ Geschwindigkeit zur Zeit x.

   (b) $f(x) =$ Volumen eines Würfels, dessen Seitenflächen vom Würfel-Mittelpunkt den Abstand x haben (somit Würfel-Kantenlänge $2x$).

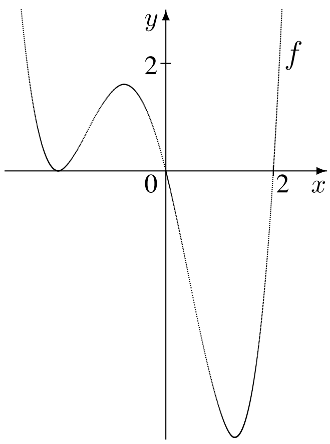
3. Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit: $f(x) = |\frac{1}{2}x + 1|$

4. Berechnen Sie für $f(x) = 7x^2 - 8x - 1$ mit Hilfe des Differentialquotienten (h-Methode, rechtsseitiger Grenzwert) die Steigung $f'(4)$ an der Stelle $x = 4$.

5. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

$f(x)$		$\frac{1}{2}x^2 + c$				$7x^2 - 8x - 1$	
$f'(x)$	1	x	x^2	x^3	x^n		$7x^2 - 8x - 1$

6. Gegeben ist der nebenstehende Graph einer Funktion f. Ermitteln Sie graphisch die Form des Graphen zur Ableitungsfunktion f'.



# 11. Klasse Übungsaufgaben	11
Ableitung, Tangenten	**07**

1. Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 8x - 48$.

   Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $P(1|?)$.

   Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen der Kurve im Punkt $Q(-1|?)$.

2. Prüfen Sie, ob die Gerade mit $g(x) = \frac{15}{4}x + \frac{35}{4}$ eine Tangente an $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ist!

3. Gegeben sind $f(x) = x^2 + 2x + 2$ und $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

   Bestimmen Sie den Winkel, unter dem sich die Funktionsgraphen schneiden; berechnen Sie hierzu die Steigungen m_1 und m_2 im Schnittpunkt und verwenden Sie anschließend $m_1 = \tan\alpha_1$, $m_2 = \tan\alpha_2$, um den Schnittwinkel der Tangenten zu ermitteln (Skizze!).

4. Begründen oder widerlegen Sie sowohl formal als auch anschaulich: Falls zwei Funktionen f und h die gleiche Ableitungsfunktion $f' = h'$ haben, stimmen dann auch f und h überein?

5. Gegeben ist die Parabelschar $f_k(x) = x^2 - 7x + k$ mit dem reellen Parameter k, der eine Verschiebung der Parabel nach oben bewirkt.

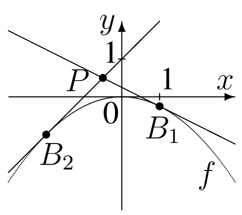
   (a) Für welche k hat die Parabel keine, eine, zwei Nullstellen?

   (b) Nun sei $k = 12{,}25$, und es werden Geraden mit Steigung -2 und y-Achsenabschnitt t als Parameter betrachtet. Vorgelegt ist folgende Frage: Wie müsste man den Wert t wählen, damit die Gerade $y = -2x + t$ die Parabel mit $k = 12{,}25$ berührt, also genau einen gemeinsamen Punkt mit ihr hat?

   Lösen Sie diese Aufgabe auf zwei Arten:

   - Untersuchung, für welchen Parameterwert t die entsprechende Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte genau eine doppelte Lösung hat.
   - Berechnung, bei welchem x-Wert und somit in welchem Punkt die Parabel die Geradensteigung aufweist, und Anpassung des Geraden-Parameterwerts t so, dass dieser Punkt auf der Geraden liegt.

6. Vom Punkt $P(-0{,}5|0{,}5)$ aus soll eine Tangente an die Parabel $f(x) = -0{,}25x^2$ gelegt werden (vgl. Skizze).
   Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der die x-Werte der entsprechenden Berührpunkte B_1 und B_2 berechnet werden können.
   Anleitung: Verwenden Sie die in grund117.pdf genannte Formel $y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b)$, um die Tangente in einem allgemeinen Geradenpunkt $B(b|f(b))$ aufzustellen, und fordern Sie, dass der Punkt P auf der Tangente liegen soll.



11. Klasse Übungsaufgaben — 11
Monotonie, Extrema — 08

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen ($D_f = \mathbb{R}$) auf Nullstellen, Monotonie und Extrema. Dabei bemerken Sie: Bei einer doppelten Nullstelle (also ohne Vorzeichenwechsel) hat man eine Berührung der x-Achse und somit gleich eine Kontrolle für den nächsten Schritt, da hier dann ein Extremum vorliegen muss.

   Berechnen Sie, unter welchem Winkel in den anderen Nullstellen der Graph die x-Achse schneidet.

   (a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$
   (b) $f(x) = x^4 - 9x^2$

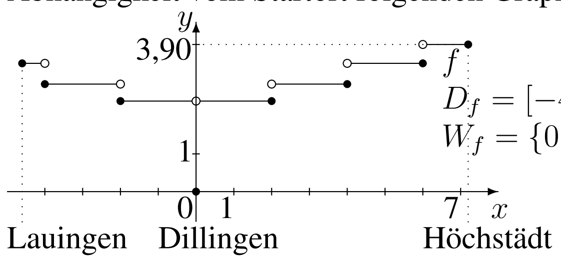
2. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Monotonie und fertigen Sie eine Skizze des Graphen.

   Begründen Sie damit, wie viele Nullstellen es gibt.

3. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x + 2$, $D = [0; \infty[$, auf relative und globale Maxima/Minima.

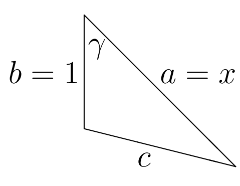
4. Finden Sie durch Rückwärts-Arbeiten einen Term zu einer Funktion, die an den Stellen $x = 2$ und $x = 5$ lokale Extrema hat.

5. Fasst man die Straße von Lauingen ($x = -4{,}6$) nach Höchstädt ($x = 7{,}2$) als Zahlenstrahl auf, so könne der Bus-Fahrpreis nach Dillingen ($x = 0$) (im Jahr 2024) in Abhängigkeit vom Startort folgenden Graphen haben:



   Beschreiben Sie den Graphen in Hinblick auf Monotonie und globale Extrema.

6. In jedem Dreieck gilt der cos-Satz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
   Wendet man diesen Satz auf ein Dreieck mit $\gamma = 45°$, $b = 1$ und variabler Seite $a = x$ an, so erhält man wegen $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $c = \sqrt{x^2 + 1^2 - 2x \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$.
   Die Seite c ist also dann besonders lang, wenn x sehr groß ist, denn dieser Wurzel-Term ist umso größer/kleiner, je größer/kleiner der Radikand ist.



   Um herauszufinden, wie lang die Seite c mindestens ist, genügt es also, ein Minimum von $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ zu finden.

   Finden Sie den Scheitel von f durch Differenzieren und zeigen Sie auf diese Weise, dass für das Dreieck in diesem Extremalfall $c = a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt; das Dreieck ist dann somit ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck („halbes Quadrat“).

11. Klasse Übungsaufgaben	11
Krümmung, Wendepunkte	09

1. Untersuchen Sie auf Nullstellen, Krümmung und Wendepunkte und skizzieren Sie:
   $f(x) = 0{,}5(x^2 - 2{,}25)(x^2 - 4) = 0{,}5x^4 - 3{,}125x^2 + 4{,}5$.

2. (a) Untersuchen Sie $f(x) = 2x^4 - x$ auf Extrema und Wendepunkte (x-Werte und Art genügen jeweils).

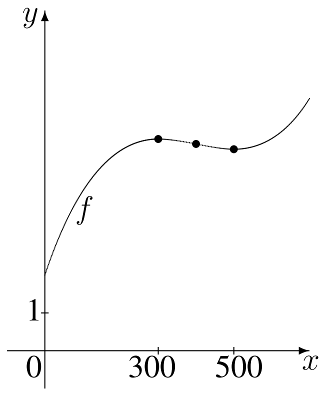
   (b) Untersuchen Sie $f(x) = -x^4 + 2x^3$ auf Extrema (x-Werte und Art genügen) und Wendepunkte. Zeigen Sie, dass bei $x = 1$ ein Wendepunkt vorliegt, und berechnen Sie die Wendetangente in diesem Punkt.

   (c) Untersuchen Sie $f(x) = x^4$ auf Extrema und Wendepunkte.

3. Berechnen Sie für $f(x) = x^5 - 5x$ die Lage der Extrema, wobei Sie die Art des Extremums mit Hilfe der zweiten Ableitung nachweisen.

4. Berechnen Sie den Term einer achsensymmetrischen Funktion 4. Grades, deren Wendepunkt bei $x = 1$ liegt, wobei der Wendepunkt zugleich Nullstelle ist und darin die Steigung 2 hat.

5. Gegeben ist folgender Graph, der die Herstellungkosten pro Stück veranschaulichen soll.



Das Vorzeichen der ersten Ableitung könnte z. B. so initerpretiert werden: Bis $x = 300$ ist f steigend, also das Vorzeichen von f' positiv. Bedeutung: Bis 300 Stück nehmen die Produktionskosten pro Stück noch zu, da z. B. noch Investitionen zum Kauf von Maschinen getätigt werden. Dann nehmen bis 500 Stück die Produktionskosten pro Stück ab (f' negativ), da sich bei Massenproduktion der Einsatz der Maschinen lohnt, ab 500 Stück steigen die Produktionskosten wieder, da z. B. teurere Schichtarbeit oder erhöhte Lagerkosten anfallen.

Formulieren Sie die Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung in dieser Sachsituation.

11. Klasse Übungsaufgaben	**11**
Kurvendiskussion, Newton-Verfahren	**10**

1. Führen Sie für $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$ eine Kurvendiskussion durch.

2. Ermitteln Sie mit dem Newton-Verfahren für $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$ mit Startwert $x_0 = 5$ einen Näherungswert für eine Nullstelle. Führen Sie zwei Iterationsschritte durch.

3. Führen Sie für $f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x$ eine Kurvendiskussion durch.

4. Verschiebt man den Graphen aus Aufgabe 3 um 2 Einheiten nach oben, so gibt es eine Nullstelle $x < 0$.

   Berechnen Sie einen Näherungswert für diese Nullstelle mit Startwert $x_0 = -1$.

   Begründen Sie, warum Startwerte $x_0 \geq 3$ keine günstige Wahl darstellen, warum also die Idee des Newton-Verfahrens, an der Stelle x_0 eine Tangente an den Graphen zu legen und die Nullstelle der Tangente als besseren Näherungswert für die Nullstelle von f zu verwenden, im Fall $x_0 \geq 3$ scheitert.

11. Klasse Übungsaufgaben	11
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	**K**

1. Funktionseigenschaften (siehe auch grund111.pdf)
   - Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{0{,}3(x-1)(x+2)}{7-2x-0{,}5x^2}$
   - Untersuchen Sie $b(x) = |x-11| = \begin{cases} -x+11 & \text{falls } x < 11 \\ x-11 & \text{falls } x \geq 11 \end{cases}$ auf Stetigkeit.
   - Untersuchen Sie $c(x) = x^3 \cdot \cos(x^3)$ auf Symmetrie.
2. Verschieben und Strecken von Funktionsgraphen (siehe auch grund112.pdf)
   Gegeben ist die Funktionenschar mit $f_a(x) = (\frac{1}{3}(x-a))^4$, $a \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie die Wirkung des Parameters a auf den Graphen, die des Faktors $\frac{1}{3}$.
3. Gebrochen-rationale Funktionen (siehe auch grund113.pdf)
   Untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs und fertigen Sie eine Skizze: $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-6}$. (Hinweis: $f(x) = x + \frac{9}{x-6}$).
4. Bedingte Wahrscheinlichkeit (siehe auch grund114.pdf)
   Ein Versandhaus bietet Bücher und deren Verfilmung auf DVD an. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde ein entsprechendes Buch kauft, betrage 6 %, für die DVD seien es 15 %. 80 % der Kunden kaufen weder Buch noch DVD. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass demnach ein Buch-Käufer auch die DVD kauft.
5. Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit (siehe auch grund115.pdf)
   Es wird zweimal mit einem sechsseitigen Würfel gewürfelt, der auf einer Seite die Zahl -2, auf einer Seite die Zahl -1, auf zwei Seiten die Zahl 1 und auf zwei Seiten die Zahl 2 trägt. Zeigen Sie, dass die Ereignisse A: „Augensumme 0“ und B: „Erste Zahl hat Betrag 1“ unabhängig sind.
6. Differenzieren (siehe auch grund116.pdf)
   (a) Begründen Sie anschaulich, warum die Funktion b mit $b(x) = |x-11|$ nicht differenzierbar ist.
   (b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $f(x) = -x^2 + 7x + \pi$.
   (c) Berechnen Sie $f'(x)$ für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
7. Ableitung, Tangenten (siehe auch grund117.pdf)
   Sei $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 25x - 20$. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(3|?)$.
8. Monotonie, Extrema (siehe auch grund118.pdf)
   Sei $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 25x - 20$. Untersuchen Sie f auf Extrema und Monotonie.
   Kleine Änderung — große Wirkung: erklären Sie kurz, wie sich $f_1(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 20$ bzw. $f_2(x) = 2x^3 - 12x^2 + 23x - 20$ auf die Frage nach Extrema auswirkt.
9. Krümmung, Wendepunkte (siehe auch grund119.pdf)
   Sei $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 25x - 20$. Untersuchen Sie f auf Wendepunkte.
   Beschreiben Sie, wie die Punktsymmetrie zum Wendepunkt rechnerisch bewiesen werden könnte.
10. Kurvendiskussion, Newton-Verfahren (siehe auch grund110.pdf)
    Zur Diskussion von $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 25x - 20$, $D = \mathbb{R}$, wurde in Aufgaben 7–9 bereits Wesentliches berechnet. Ergänzen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, Skizze und Wertebereich.
    Beschreiben Sie, wie eine Nullstelle von f näherungsweise berechnet werden könnte.

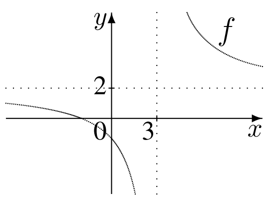
11. Klasse Lösungen — 11
Funktionseigenschaften — 01

1. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to \pm\infty$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty$.
   (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-2+\frac{1}{x}}{-2+\frac{1}{x}} \to \mp\infty$.
   (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$.
   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$ (denn z. B. $-3\cdot 0{,}1^{-100} = -3\cdot(\frac{1}{10})^{-100} = -3\cdot 10^{100}$), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$.
   (g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to -5$.
   (h) Hier ist zwar $f(1\,000\,000) = (10^6)^2 - 10^{-10}\cdot(10^6)^3 = 10^{12} - 10^{-10+18} = +999\,900\,000\,000$, jedoch ist wegen „$-x^3$“ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty$.

2. (a) P: $f(-x) = (-x)^{11} - (-x)^5 + 2(-x) = -x^{11} + x^5 - 2x = -(x^{11} - x^5 + 2x) = -f(x)$.
   (b) A: $f(-x) = (-x)^6 - 9(-x)^4 = x^6 - 9x^4 = f(x)$.
   (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2}$, also A: $f(-x) = \frac{(-x)^4+1}{(-x)^4-3(-x)^2} = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2} = f(x)$.
   (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-3)}$ hat Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$; der Funktionsgraph kann also nicht symmetrisch sein, da schon D_f nicht symmetrisch ist.
   Sichtbar ist die Nicht-Symmetrie auch an einem Gegenbeispiel, z. B. $f(-2) = \frac{4-1}{-8-3\cdot 4} = -\frac{3}{20}$, aber $f(2) = \frac{4-1}{8-3\cdot 4} = -\frac{3}{4}$.
   (e) sin ist punktsymmetrisch zum Ursprung, cos achsensymmetrisch zur y-Achse.
   (f) P: $f(-x) = (\sin(-x)\cdot\cos(-x))^3 = (-\sin x\cdot\cos x)^3 = -(\sin x\cdot\cos x)^3 = -f(x)$.

3. Nullstelle: $f(x) = 0$ liefert $2x + 4 = 0$, also $x = -2$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$.

   $f(3{,}01)$: Im Zähler etwas mehr als 10, im Nenner $0,01$, also sehr großer Funktionswert.
   $f(2{,}99)$: Im Zähler fast 10, im Nenner $-0{,}01$, also negativer betragsmäßig sehr großer Funktionswert (Graph nach unten $\to -\infty$).

   $f(x) - 2 = \frac{2x+4}{x-3} - 2 = \frac{2x+4}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = \frac{2x+4-(2x-6)}{x-3} = \frac{10}{x-3}$;
   wenn für große x-Werte also $|f(x) - 2| < 0{,}1$ gilt, so muss also $\frac{10}{x-3} < 0{,}1$ gelten, also $\frac{10}{0{,}1} < x - 3$, somit $x > 103 = x_0$.

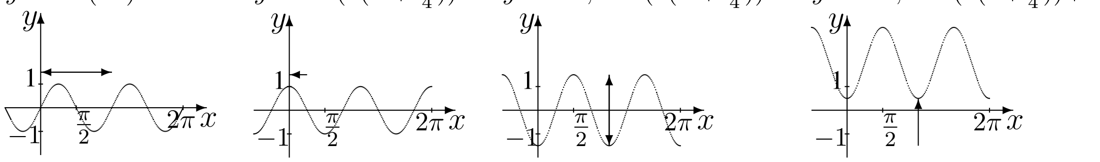
4. (a) Nahtstelle $x = -5$:
   Von links: $\lim\limits_{x\to-5-0} f(x) = (-2)\cdot(-5) - 10 = 0$.
   Von rechts und Funktionswert: $\lim\limits_{x\to-5+0} f(x) = 2\cdot(-5) + 10 = 0 = f(-10)$.
   f ist also stetig.
   (b) Nahtstelle $x = 1000$:
   Von links und Funktionswert: $\lim\limits_{x\to1000-0} f(x) = 0{,}19\cdot 1000 = 190 = f(1000)$.
   Von rechts: $\lim\limits_{x\to1000+0} f(x) = g + 0{,}15\cdot 1000 = g + 150$.
   f ist stetig, falls $g + 150 = 190$, falls also $g = 40$, andernfalls nicht stetig.

11. Klasse Lösungen — 11
Verschieben und Strecken von Fkt.graphen — 02

1. Ausgehend vom Vergleich der Punkte $(2|4)$ und $(2|1)$ erkennt man die Stauchung in y-Richung auf $\frac{1}{4}$ so große y-Werte, also $h(x) = \frac{1}{4}x^2$.
   Vergleich der Punkte $(1|1)$ und $(2|1)$ liefert eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2, also auch $h(x) = (bx)^2$ mit $b = \frac{1}{2}$. In der Tat ist $h(x) = (\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{4}x^2$.

2. Verschiebung der Funktion f um c nach links und um d nach oben hat den Term $h(x) = (x+c)^3 + d = (x+c)(x+c)(x+c) + d = (x^2 + 2cx + c^2)(x+c) + d = x^3 + 3cx^2 + 3c^2x + c^3 + d$. Vergleich dieses Terms mit $x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ ergibt $3c = -6$, $3c^2 = 12$ und $c^3 + d = -1$, woraus $c = -2$ und $d = 7$ folgt. Also $h(x) = (x-2)^3 + 7$, d. h. es wurde um 2 nach rechts und um 7 nach oben verschoben.

3. $y = \sin(2x)$ | $y = \sin(2(x + \frac{\pi}{4}))$ | $y = -1{,}5\sin(2(x + \frac{\pi}{4}))$ | $y = -1{,}5\sin(2(x+\frac{\pi}{4}))+2$

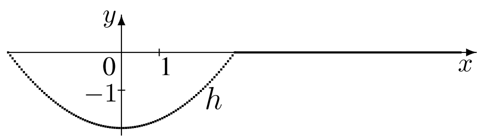


Stauchung in x-Ri. ($\frac{1}{2}$ Periodenlänge) | Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach links | 1,5-fache y-Streckung; Spiegelung an x-Achse | Verschiebung in y-Richtung um 2 nach oben

4. $h(x) = -2f(\frac{1}{3}(x+3))$, d. h. es wurde um 3 nach links verschoben, in x-Richtung mit Faktor 3 gestreckt, in y-Richtung mit Faktor 2 und gespiegelt.

   Für die Wertetabelle werden aus der Zeichnung die benötigten Werte vom $f(x)$ abgelesen:

x	-3	0	3
$h(x)$	$-2f(0)=0$	$-2f(1)=-2$	$-2f(2)=0$



5. (a) $g_a(x) = 0$, also $(7-a)x + \frac{1}{2}a = 0$; $(7-a)x = -\frac{1}{2}a$; $x = -\frac{a}{2(7-a)}$.
   Für $a = 7$ gibt es keine Nullstelle (sonst 0 im Nenner/waagrechte Gerade).

   (b) Punkt $(2011|2014)$ einsetzen: $2014 = (7-a)\cdot 2011 + \frac{1}{2}a$, also $2014 = 14077 - 2011a + 0{,}5a$, also $-12063 = -2010{,}5a$, also $a = 6$.

   (c) $g_0(x) = 7x$, $g_2(x) = 5x + 1$. Schnittpunkt S durch Gleichsetzen: $7x = 5x + 1$, also $x = 0{,}5$. $y = g_0(0{,}5) = 3{,}5$. Somit $S(0{,}5|3{,}5)$.
   Prüfe durch Einsetzen, ob S auf allen g_a liegt: $3{,}5 = (7-a)\cdot 0{,}5 + \frac{1}{2}a$ ergibt $3{,}5 = 3{,}5 - 0{,}5 + 0{,}5a$, also $0 = 0$, eine für alle a wahre Aussage, S ist also ein allen g_a gemeinsamer Schnittpunkt.

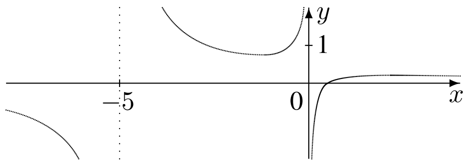
6. Gemäß Skizze ist Punktsymmetrie-Zentrum $Z(3|2)$ zu vermuten.

   Verschobene Funktion:
   $h(x) = f(x+3) - 2 = \frac{2(x+3)+4}{x+3-3} - 2 = \frac{2x+10}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{2x+10-2x}{x} = \frac{10}{x}$.

   Punktsymmetrie: $h(-x) = \frac{10}{-x} = -\frac{10}{x} = -h(x)$.

11. Klasse Lösungen	11
Gebrochen-rationale Funktionen	**03**

1. Faktorisieren: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+5x} = \frac{2(x-0{,}5)}{x(x+5)}$.
$\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-1}{(\pm 0)\cdot 5}$" $\to \mp\infty$.
$\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-11}{(-5)\cdot(\pm 0)}$" $\to \pm\infty$.



2. $f(x) = \frac{1-x}{0{,}5(x-3)(x+1)}$ (vgl. grund113.pdf, Fußnote 2), also $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\}$.
$\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) =$ „$\frac{2}{(0{,}5\cdot(-4)\cdot(\pm 0)}$" $\to \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-2}{(0{,}5\cdot(\pm 0)\cdot 4}$" $\to \mp\infty$, senkrechte Asymptoten (einfache Polstellen) $x = -1$ und $x = 3$.
Da der Graph rechts von $x = -1$ nach unten verläuft und links von $x = 3$ nach oben, ist der Wertebereich $W = \mathbb{R}$. Dazwischen Nullstelle $x = 1$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, also waagrechte Asymptote $y = 0$. Schnitt mit der y-Achse: $(0|-\frac{2}{3})$.

3. Bei einer Polstelle ungerader Vielfachheit erhält man einen Vorzeichenwechsel (Vzw); bei gerader Vielfachheit liegt bei Annäherung von links und von rechts das gleiche Vorzeichen vor. Definitionslücke ist in allen gegebenen Beispielen $x = -3$.
   (a) $f(x) = \frac{-x^2}{3(x+3)^2}$. Polstelle 2. Ordnung, kein Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-9}{+0}$" $\to -\infty$
   (b) $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^3}$. Polstelle 3. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{+9}{\pm 0}$" $\to \pm\infty$
   (c) $f(x) = \frac{(2+x)(2-x)}{(x+3)(x^2-3x+9)}$. Polstelle 1. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-5}{\pm 0}$" $\to \mp\infty$

   Damit ergibt sich: Abbildung A ist f_1, B ist f_2, C ist f_3.

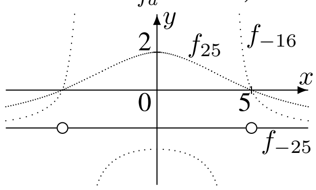
4. Polstelle, z. B. $(x-2)^2$ im Nenner. „Keine Nullstellen": Im Zähler zunächst Term wie x^2+1 bzw. besser x^2+a. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ Vorfaktor 3 im Zähler. Somit $f(x) = \frac{3(x^2+a)}{(x-2)^2}$. y-Achsen-Schnitt: $f(0) = \frac{3\cdot a}{4} = 6$, also $a = 8$. Somit $f(x) = \frac{3(x^2+8)}{(x-2)^2}$.

5.

	$f(x)$	Senkrechte Asymptote (Pol)	Asymptote für $x\to\pm\infty$
(a)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x^2+8)}$	$x = 0$	Waagrecht: $y = 0$
(b)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+8)}$	$x = 0$ und $x = -8$	Waagrecht: $y = 1$
(c)	$x + \frac{12x}{(x+2)(x-2)}$	$x = -2$ und $x = 2$	Schräg: $y = x$
(d)	$3x - \sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$	$x = 1$	Schräg: $y = 3x - \sqrt{2}$
(e)	$\frac{7}{2}x - 3 - \frac{3}{2x}$	$x = 0$	Schräg: $y = \frac{7}{2}x - 3$

Zu (c): $f(x) = x + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x^3-4x+12x}{x^2-4} = \frac{x^3+8x}{x^2-4} = \frac{x(x^2+8)}{(x+2)(x-2)}$

6. (a) Definitionsbereich: Nenner $x^2+a = 0$, also $x^2 = -a$ liefert $D_{f_a} = \mathbb{R}$, falls $a > 0$, und $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{-a}\}$, falls $a \leq 0$.
Nullstellen: Zähler $-2x^2+50 = 0$ liefert $x_{1/2} = \pm 5$.
Einsetzen von $x = 0$ ergibt $Y_a(0|\frac{50}{a})$ $(a \neq 0)$.



   (b) Faktorisieren für $a < 0$: $f_a(x) = \frac{-2(x+5)(x-5)}{(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}$.

$$\lim_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f_a(x) = \text{„}\frac{-2(\sqrt{-a}\pm 0+5)(\sqrt{-a}\pm 0-5)}{(\sqrt{-a}\pm 0+\sqrt{-a})(\sqrt{-a}\pm 0-\sqrt{-a})}\text{"} = \text{„}\frac{-2(\sqrt{-a}+5)(\sqrt{-a}-5)}{(2\sqrt{-a})(\pm 0)}\text{"} \to \pm\infty,$$

   denn für $-25 < a < 0$ ist $\sqrt{-a}-5$ negativ, der Zähler insgesamt also positiv.

   (c) Man beachte, dass $f_{-25}(x) = \frac{-2(x^2-25)}{x^2-25} = -2$ mit $D_{f_{-25}} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 5\}$.

11. Klasse Lösungen — 11
Bedingte Wahrscheinlichkeit — 04

1. S=Schwimmen, F=Fußball, L=Lauf, M=Mädchen, B=Buben, gesamt $26+28=54$

	S	F	L	
M	12	**2**	14	**28**
B	**2**	14	10	**26**
	14	16	24	**54**

Zuerst werden die fett gedruckten Felder ausgefüllt. Für F + L bleiben $54-14=40$, davon $\frac{2}{5}$ Fußball, also 16. Danach werden die restlichen Felder so ergänzt, dass die Spalten- und Zeilensummen stimmen, also z. B. erste Spalte $12+2=14$ usw.

W., dass Mädchen Fußball spielt: $P_M(F)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{2}{54}}{\frac{28}{54}}=\frac{2}{28}\approx 7{,}1\ \%$

W., dass Bub Fußball spielt: $P_B(F)=\frac{P(F\cap B)}{P(B)}=\frac{14}{26}\approx 53{,}8\ \%$. Da für Buben die W. der Fußball-Leidenschaft größer ist, hängt diese offenbar vom Geschlecht ab.

„stammt“-Frage umformuliert: W. für Mädchen unter der Bedingung Fußball: $P_F(M)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{2}{54}}{\frac{16}{54}}=\frac{2}{16}=12{,}5\ \%$.

2. (a) $P(\text{„Brennt weniger als 200 d“})=1-P(\text{„Brennt}\geq 200\text{ d“})=1-0{,}35=65\ \%$

   (b) B_b: „Brennt mindestens b Tage.

   $P_{B_0}(B_{100})=\frac{P(B_{100}\cap B_0)}{P(B_0)}=\frac{61}{100}=61\ \%$.

   $P_{B_{100}}(B_{200})=\frac{P(B_{200}\cap B_{100})}{P(B_{100})}=\frac{35}{61}\approx 57\ \%$.

   $P_{B_{200}}(B_{300})=\frac{P(B_{300}\cap B_{200})}{P(B_{200})}=\frac{18}{35}\approx 51\ \%$.

   Deutung der Abnahme dieser bedingten W.: Ältere Leuchtstoffröhren haben aufgrund ihres Alters geringere „Überlebenschancen“.

3.

	A	$\overline{A}$	
B	**0,18**	0,112	0,292
$\overline{B}$	**0,54**	0,168	0,708
	0,72	0,28	1

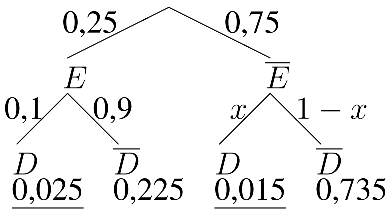
Vierfeldertafel: Die fett gedruckten Felder werden zuerst ausgefüllt; danach: $P(A\cup B)$ besteht aus den drei unterstrichenen Feldern.

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}18}{0{,}292}\approx 61{,}6\ \%$

$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}112}{0{,}28}=0{,}4=40\ \%$

4. E: „Becher enthält Erdbeerjoghurt“, D: „Deckel defekt“

Baumdiagramm: Die unterstrichenen Daten müssen zusammen 4 % ergeben.

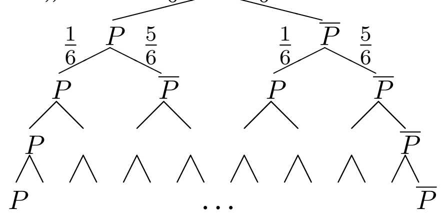


(a) $x=P_{\overline{E}}(D)=\frac{P(D\cap\overline{E})}{P(\overline{E})}=\frac{0{,}015}{0{,}75}=0{,}02=2\ \%$

Bei Absenken des Ausschussanteils beim Erdbeerjoghurt auf 0 würde der gesamte Ausschussanteil immer noch $P(D\cap\overline{E})=0{,}015=1{,}5\ \%$ betragen, so dass auf diese Weise das angestrebte Ziel nicht erreicht werden kann.

(b) $P_{\overline{D}}(E)=\frac{P(E\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0{,}225}{0{,}96}\approx 0{,}2344=23{,}44\ \%$

5. (a) P: „Pasch“ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$



A: „genau 3-mal Pasch“,

B: „mindestens einmal Pasch“,

C: „drei Pasch hintereinander“

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1-(\frac{5}{6})^4}\approx 0{,}298$

$P_A(C)=\frac{2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=0{,}5$

(b) Für die Anzahl n der Würfe muss gelten:

$P(\text{„mind. einmal P.“})=1-P(\text{„kein P.“})=1-(\frac{5}{6})^n\geq 0{,}99$, also $(\frac{5}{6})^n\leq 0{,}01$.

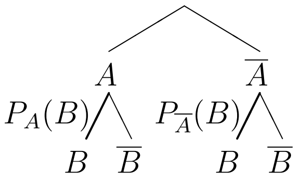
Lösung dieser Exponentialgleichung durch Logarithmieren und Anwenden der log-Rechenregeln: $n\cdot\log\frac{5}{6}\leq\log 0{,}01\quad |:\log\frac{5}{6}<0$ (!)

$n\geq\frac{\log 0{,}01}{\log\frac{5}{6}}\approx 25{,}3$. Also muss die Anzahl der Würfe $n\geq 26$ sein.

11. Klasse Lösungen — 11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 05

1. (a) In jedem der vier Felder der Vierfeldertafel ergibt sich der Wert als Produkt der Randwahrscheinlichkeiten.

   (b) Im Baumdiagramm stehen an den Ästen der zweiten Stufe die gleichern Werte $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$, wobei anschaulich klar ist, dass im Fall von Unabhängigkeit die Wahrscheinlichkeit von B nicht von der Bedingung abhängt, ob auch A eintritt.



2. (a) V: Vorderlicht defekt. R: Rücklicht defekt.
   Vierfeldertafel: Man macht sich zuerst klar, dass die W. von mindestens einem Defekt $P(R \cup V)$ durch drei der Felder gegeben ist, so dass für das vierte Feld $P(\overline{R} \cap \overline{V}) = 1 - 0{,}09$ bleibt. Zeilen- und spaltenweise können die restlichen Felder ergänzt werden.

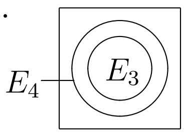
	V	$\overline{V}$	
R	0,003	0,057	0,06
$\overline{R}$	0,03	0,91	0,94
	0,033	0,967	1

   Man erkennt die Abhängigkeit: $P(V) \cdot P(R) = 0{,}033 \cdot 0{,}06 \neq 0{,}003 = P(V \cap R)$.

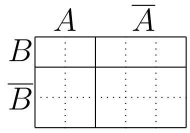
   (b) Im Fall von Unabhängigkeit müsste für die gegebene Größe gelten:
   $P(R \cap \overline{V}) = P(R) \cdot P(\overline{V})$, also $0{,}057 = 0{,}06 \cdot P(\overline{V})$, also $P(\overline{V}) = \frac{0{,}057}{0{,}06} = 0{,}95$, also $P(\overline{R} \cap \overline{V}) = 0{,}94 \cdot 0{,}95 = 0{,}893$, also $P(R \cup V) = 1 - 0{,}893 = 0{,}107$.

3. $\overline{E_3}$: „Frühestens der 4. Besucher wünscht Currywurst“ oder „Die ersten 3 Besucher wünschen nicht Currywurst.

   $\overline{E_3} \cap E_4$: „Der vierte Besucher ist der erste, der Currywurst wünscht“.
   $P(\overline{E_3}) = 1 - P(E_3) = 1 - (1 - 0{,}6^3) = 0{,}216$.
   Es ist E_3 Teilmenge von E_4 und daher
   $P(\overline{E_3} \cap E_4) = P(E_4) - P(E_3) = 1 - 0{,}6^4 - (1 - 0{,}6^3) = 0{,}0864$



4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = 0{,}6$.
   A, B unabhängig: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} = P(A \cap B)$.
   Im Bild ist dies daran erkennbar, dass die „Teilungslinie“ auf gleicher Höhe verläuft, was bedeutet, dass der Anteil der B unter den A (also $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$) gleich dem Anteil der B unter der Gesamtmenge ist $(= P(B))$.



5. (a) $\Omega = \{1111, \ldots, 7777\}$, also (Zählprinzip → grund55.pdf): $|\Omega| = 7^4 = 2401$.
   Für die Anordnungsmöglichkeiten der gleichen Ziffern gibt es 6 Möglichkeiten (11xy, 1x1y, 1xy1, x11y, x1y1, xy11).
   Es gibt 7 Möglichkeiten für die Wahl der beiden gleichen Ziffern, dann noch 6 Möglichkeiten für die zweite und dann noch 5 Möglichkeiten für die dritte Ziffer.
   Also $|Z| = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$, somit $P(Z) = \frac{1260}{2401} \approx 0,525$.

   (b) Es gibt 4 ungerade Ziffern 1, 3, 5, 7, also $P(U) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$.
   Entsprechend zu Teilaufgabe (a) überlegt man: $|U \cap Z| = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$.
   $P(U \cap Z) = \frac{144}{2401} \approx 0{,}060$, aber $P(U) \cdot P(Z) = \frac{256}{2401} \cdot \frac{1260}{2401} \approx 0{,}056$. Also sind U und Z abhängige Ereignisse.

   (c) $P_Z(U) = \frac{P(U \cap Z)}{P(Z)} = \frac{144}{1260} \approx 0{,}114$.

11. Klasse Lösungen — 11
Differenzieren — 06

1. Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) ergeben sich aus $f(x) = 0$ und sind im Folgenden mit N_i bezeichnet. Der Schnittpunkt Y mit der y-Achse ergibt sich durch Berechnung von $f(0)$.
   (a)
   - $f_1'(x) = 4x^3$
   - $f_2'(x) = -x - 2$
   - $f_3'(x) = 0$
   - $f_4(x) = x^3 + 6x - 7$, also $f_4'(x) = 3x^2 + 6$

   (b)
   - $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$; Steigungen: $f_1'(-2) = -32$, $f_1'(2) = 32$.
     $Y(0|-16)$; Steigung $f_1'(0) = 0$ (waagrechte Tangente).
   - $N_1(2|0)$, $N_2(-6|0)$; Steigungen: $f_2'(2) = -4$, $f_2'(-6) = 4$.
     $Y(0|6)$; Steigung: $f_2'(0) = -2$.
   - f_3 ist eine Parallele zur x-Achse und hat keine Nullstellen.
     $Y(0|11)$; Steigung: $f_3'(0) = 0$.
   - $N_1(1|0)$; Steigung: $f_4'(1) = 9$. $Y(0|-7)$; Steigung: $f_4'(0) = 6$.

2. (a) $f'(x) =$ Geschwindigkeitsänderung pro Zeit $=$ Beschleunigung zur Zeit x.
   (b) $f(x) = (2x)^3 = 8x^3$. $f'(x) = 24x^2 = 6 \cdot (2x)^2 =$ Oberfläche der Würfels.
   Anschaulich ist $f(x+h)$ das Volumen eines Würfels, der außen zusätzlich mit einer Haut der Dicke h überzogen ist. $f(x+h) - f(x)$ ist das Volumen der Haut. Dividert man dieses Volumen durch die Dicke h, so erhält man die Fläche.

3. $f(x) = |\frac{1}{2}x+1| = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{, falls } \frac{1}{2}x+1 \geq 0 \\ -(\frac{1}{2}x+1) & \text{, falls } \frac{1}{2}x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{, falls } x \geq -2 \\ -\frac{1}{2}x-1 & \text{, falls } x < -2 \end{cases}$
   Die Funktion ist an der Stelle $x = -2$ nicht differenzierbar, denn die Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(-2+h)+1-0)}{h} = \frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h} = \frac{-\frac{1}{2}(-2-h)-1-0}{-h} = -\frac{1}{2}$ stimmen nicht überein.
   Anschaulich ist $f(x) = |\frac{1}{2}(x+2)|$ eine um 2 nach links und mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckte Betragsfunktion, so dass f an der Stelle -2 einen Knick aufweist.

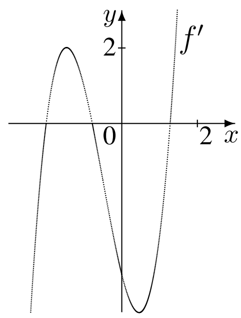
4. $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$
   $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{7(4+h)^2-8(4+h)-1-(7\cdot 4^2-8\cdot 4-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{7(16+8h+h^2)-32-8h-1-79}{h}$
   $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{112+56h+7h^2-8h-112}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{48h+7h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(48+7h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(48+7h) = 48$

5.

$f(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$7x^2 - 8x - 1$	$\frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x$
$f'(x)$	1	x	x^2	x^3	x^n	$14x - 8$	$7x^2 - 8x - 1$

(erste Zeile jeweils plus additive Konstante $+c$; Nebenrechnung: $f(x) = 7 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x + c$)

6. Zur Ermittlung der Ableitung legt man an verschiedenen Punkten des Graphen eine Tangente und bestimmt mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dessen Steigung. Die so gewonnenen Werte werden in ein Koordinatensystem eingetragen. So ist z. B. bei $x = -2$ die Steigung 0 ($\to$ Punkt $(-2|0)$), ebenso bei $x \approx -0{,}8$; bei $x = 0$ ist die Steigung etwa -4 ($\to$ Punkt $(0|-4)$).



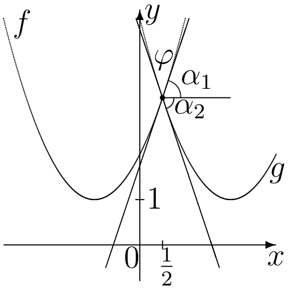
11. Klasse Lösungen — 11
Ableitung, Tangenten — 07

1.
$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$
Tangente:
$y = f(1) = -36$. Also $P(1|-36)$.
$m = f'(1) = 19$
Ansatz für die Tangente: $y = 19x + t$.
P einsetzen: $-36 = 19 \cdot 1 + t$; $t = -55$. Also Tangente: $y = 19x - 55$.

Normale:
$y = f(-1) = -54$. Also $Q(-1|-54)$.
Funktionssteigung $m_1 = f'(-1) = 3$.
Für die Normalensteigung m_2 gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$
Ansatz für die Normale: $y = -\frac{1}{3}x + t$
Q einsetzen: $-54 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + t$; $t = -54\frac{1}{3}$. Also Normale: $y = -\frac{1}{3}x - 54\frac{1}{3}$.

2.
Falls ein Berührpunkt vorliegt, muss dort die Geradensteigung gleich der Funktionssteigung sein: $g'(x) = f'(x)$:
$\frac{15}{4} = 3x^2 - 3$; $x_{1/2} = \pm\frac{3}{2}$.
Zusätzlich muss ein gemeinsamer Punkt vorliegen, also $g(x) = f(x)$ sein.
Für $x_1 = +\frac{3}{2}$ ist (einsetzen, nachrechnen!) dies nicht der Fall, dagegen für $x_2 = -\frac{3}{2}$ ist $g(x_2) = f(x_2) = \frac{25}{8}$, so dass die Gerade im Punkt $(-\frac{3}{2}|\frac{25}{8})$ Tangente des Funktionsgraphen ist.

3.
Schnittstelle: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Steigungen: $f'(x) = 2x+2$, $g'(x) = 2x-4$.
$m_1 = f'(\frac{1}{2}) = 3$, $m_2 = g'(\frac{1}{2}) = -3$.
$\tan\alpha = m \Rightarrow \alpha_1 \approx 71{,}6°$, $\alpha_2 \approx -71{,}6°$.



Größerer Winkel zwischen den Tangenten: $\alpha_1 + |\alpha_2| = \alpha_1 - \alpha_2 = 71{,}6° + 71{,}6° = 143{,}2°$.
Kleinerer Winkel (Schnittwinkel): $\varphi = 180° - 143{,}2° = 36{,}8°$.

4.
Nein, die Funktionen können sich durch eine additive Konstanten unterscheiden, welche beim Differenzieren wegfällt, so haben z. B. $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^2 - 11$ beide die Ableitung $f'(x) = h'(x) = 2x$.
Anschaulich haben im Fall $f' = h'$ die Funktionen überall die gleiche Steigung und können daher in y-Richtung verschoben sein.

5.
(a) $x^2 - 7x + k = 0$; $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2 \cdot 1}$ mit Diskriminante $D = 49 - 4k$.

Ist $D > 0$, also $49 - 4k > 0$, also $k < 12{,}25$, gibt es zwei Lösungen für die Nullstellen.
Ist $D = 0$, also $k = 12{,}25$, gibt es genau eine doppelte Nullstelle.
Ist $D < 0$, also $k > 12{,}25$, gibt es keine Nullstellen.

(b) Gemeinsame Punkte durch Gleichsetzen, d. h. $x^2 - 7x + 12{,}25 = -2x + t$ muss genau eine Lösung haben.
$x^2 - 5x + 12{,}25 - t = 0$; $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (12{,}25 - t)}}{2 \cdot 1} = \frac{2{,}5 \pm \sqrt{4t - 24}}{2}$.
Diese Gleichung hat genau eine Lösung, wenn unter der Wurzel 0 steht, also $4t - 24 = 0$, also $t = 6$.

Zweiter Lösungsweg: Parabelpunkt mit gleicher Steigung -2 wie die Gerade:
$f'_{12{,}25}(x) = 2x - 7$; $f'_{12{,}25}(x) = -2$; $2x - 7 = -2$; $x = \frac{5}{2}$.
y-Wert Parabelpunkt B: $f_{12{,}25}(\frac{5}{2}) = 1$.
$B(\frac{5}{2}|1)$ muss auf der Geraden liegen:
Einsetzen: $1 = (-2) \cdot 2{,}5 + t$; $t = 6$.

6.
$f'(x) = -0{,}25 \cdot 2x = -0{,}5x$. $B(b|f(b))$
Allgemeine Tangentengleichung in B:
$y = -0{,}5b \cdot (x - b) - 0{,}25b^2$.
$P(-0{,}5|0{,}5)$ einsetzen:
$0{,}5 = -0{,}5b \cdot (-0{,}5 - b) - 0{,}25b^2$
Gleichungslösungen: $b_1 = 1$, $b_2 = -2$.

11. Klasse Lösungen — 11
Monotonie, Extrema — 08

1.

(a) Nullstellen: $f(x)=x^2(x^2-4x+6)=0$: $x_{1/2} = 0$ (doppelt), keine weitere Lösung aus $x^2-4x+6=0$.

Extrema/Monotonie:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$
$f'(x) = 0$: $4x(x^2-3x+3) = 0$;
$x_1 = 0$ (wie erwartet); keine weitere Lösung aus $x^2-3x+3=0$.

$f'<0$		$f'>0$
fällt	0	steigt
	Min$(0;0)$	

(b) Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2-9) = 0$; $x_{1/2} = 0$ (doppelt), $x_{3/4} = \pm 3$.

Extrema/Monotonie:
$f'(x) = 4x^3 - 18x = 4x(x^2-4{,}5) = 0$;
$x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{4{,}5}$

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
fällt	$-\sqrt{4{,}5}$	steigt	0	fällt	$\sqrt{4{,}5}$	steigt
	Min		Max		Min	

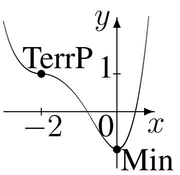
Min$(\pm\sqrt{4{,}5}|-20{,}25)$, Max$(0|0)$

Schnittwinkel bei der Nullstelle $x=3$: $m = f'(3) = 4\cdot 3^3 - 18\cdot 3 = 54 = \tan\alpha$, also $\alpha \approx 88{,}94°$.
Achsensymmetrie von f, daher bei $x=-3$ Schnittwinkel $-88{,}94°$.

2.
$f'(x) = \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 + 6x$
$f'(x) = 0$: $x(\frac{3}{2}x^2 + 6x + 6) = 0$.
$x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 1{,}5\cdot 6}}{2\cdot 1{,}5} = -2$

$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$
fällt	-2	fällt	0	steigt
	TerrP		Min	

TerrP$(-2|1)$, Min$(0|-1)$



Zwar könne eine Funktion 4. Grades bis zu vier Nullstellen haben, hier aber liegen zwei vor, da wegen der Lage der Punkte und der Monotonie im Intervall $]-\infty;-2]$ keine Nullstelle liegen kann, im Intervall $[-2;0]$ genau eine, in $[0;\infty[$ ebenso genau eine.

3.
$f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x + 2$
$f'(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3$
$f'(x) = 0$: $0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{1{,}6\pm\sqrt{2{,}56-4\cdot 0{,}2\cdot 3}}{2\cdot 0{,}2}$
$x_1 = 5$, $x_2 = 3$

	$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
0	steigt	3	fällt	5	steigt
		Max$(3|5{,}6)$		Min$(5|5\frac{1}{3})$	

Diese Funktion 3. Grades verläuft nach rechts oben, am linken Rand des Definitionsbereichs ist der Graphenpunkt $(0|2)$ noch tiefer als das lokale Min.
Somit:
Lokale Extrema: Max$(3|5{,}6)$, Min$(5|5\frac{1}{3})$
Globales Minimum: Randminimum bei $(0|2)$, also kleinstmöglicher Wert $y=2$.
Ein globales Maximum gibt es nicht, da nach rechts wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$ beliebig große Werte vorliegen.

4.
f' muss an den Stellen $x=2$ und $x=5$ Nullstellen mit Vorzeichenwechel haben, also z. B. $f'(x) = (x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$.
Somit ist z. B. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x$.
Denkbar ist noch ein Vorfaktor (z. B. 6) oder eine additive Konstante (z. B. -11), also z. B. auch $f_2(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 11$.

5.
Im Intervall $[-4{,}6;0]$ ist der Graph monoton fallend (aber nicht streng monoton), im Intervall $[0;7{,}2]$ monoton steigend.
Globaler Minimalwert ist der im Punkt $(0|0)$ vorliegende Wert 0, globaler Maximalwert der im Punkt $(7{,}2|3{,}9)$ vorliegende Wert 3,90 (Randextremum)

6.
$f'(x) = 2x - \sqrt{2} = 0. \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dann ist $c = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1} =$
$= \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Klasse Lösungen — 11
Krümmung, Wendepunkte — 09

1.

(a) $f'(x) = 8x^3 - 1$; $f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0$: $x^3 = \frac{1}{8}$; $x = \frac{1}{2}$. $f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow$ Min

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ | 0 | $f'' > 0$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0$:
$-2x^2(2x - 3) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

$f' > 0$ | $f' > 0$ | $f' < 0$
steigt | 0 | steigt | $\frac{3}{2}$ | fällt

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$:
$-12x(x - 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$f'' < 0$ | 0 | $f'' > 0$ | 1 | $f'' < 0$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x)$: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt $(1|1)$:
$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.
Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 0$.

$f' < 0$ | $f' > 0$
fällt | 0 | steigt

Also Min$(0|0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ | 0 | $f'' > 0$

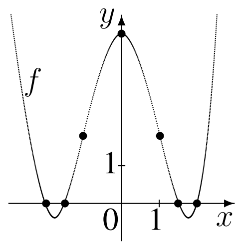
Also Flachpunkt $(0|0)$

2.
$f'(x) = 5x^4 - 5$, $f'(x) = 0$: $x_{1/2} = \pm 1$
$f''(x) = 20x^3$.
$f''(1) = 20 > 0$, also Min$(1| - 4)$,
$f''(-1) = -20 < 0$, also Max$(-1|4)$.

3.
Nullstellen: $f(x) = 0{,}5(x^2 - 2{,}25)(x^2 - 4) = 0{,}5(x+1{,}5)(x-1{,}5)(x+2)(x-2) = 0$ ergibt $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.
$f'(x) = 2x^3 - 6{,}25x$
$f''(x) = 6x^2 - 6{,}25$
$f''(x) = 0$: $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{6{,}25}{6}} \approx \pm 1{,}02$

$f'' > 0$ | | $f'' < 0$ | | $f'' > 0$
links- | $-1{,}02$ WP | rechts- | $1{,}02$ WP | links-gekrümmt

$y = f(\pm\sqrt{\frac{6{,}25}{6}}) = 0{,}5(\frac{6{,}25}{6} - 2{,}25)(\frac{6{,}25}{6} - 4) = \frac{2059}{288} \approx 1{,}79$, also Lage ungefähr WP$(\pm 1{,}02|1{,}79)$



Sichtbar am Term sind auch der y-Achsenschnitt bei $(0|4{,}5)$ und die Achsensymmetrie zur y-Achse.

4.
Ansatz wegen Achsensymmetrie mit geraden Funktionen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$;
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$; $f''(x) = 12ax^2 + 2b$
WP bei $x = 1$: $f''(1) = 0$: $12a + 2b = 0$ A
Nullstelle bei $x = 1$: $f(1) = 0$: $a + b + c = 0$ B
Steigung bei $x = 1$: $f'(1) = 2$: $4a + 2b = 2$ C
Aus A und C folgt $8a = -2$, also $a = -\frac{1}{4}$.
Mit A folgt $b = \frac{3}{2}$, mit B dann $c = -\frac{5}{4}$.
Also: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$.
Mittels Vorzeichenbetrachtung von f'' bestätigt man, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein WP vorliegt (und nicht nur ein Flachpunkt).

5.
Bis $x = 400$ ist der Graph rechtsgekrümmt, also $f'' < 0$. Die Preissteigerung bei Ausweitung der Produktion um 1 Stück wird verlangsamt. Bei $x = 400$ ist der Wendepunkt, hier ist die Preisersparnis pro Stück bei Ausweitung der Produktion am stärksten (Graph am steilsten nach unten gerichtet). Ab $x = 400$ ist der Graph linksgekrümmt, also $f'' > 0$, die Preissteigerung bei Produktionsausweitung nimmt immer stärker zu.

11. Klasse Lösungen | 11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren | 10

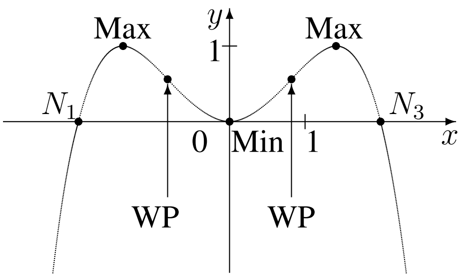
1.
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$
$D = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to -\infty$: Verlauf von „links unten nach rechts unten".
$f(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + (-x)^2 = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$ $= f(x)$: Achsensymmetrie zur y-Achse.
N: $f(x) = 0$: $x^2(-\frac{1}{4}x^2 + 1) = 0$. $x_{1/2} = 0$ oder $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$, d. h. $x_{3/4} = \pm 2$
E: $f'(x) = -x^3 + 2x$. $f'(x) = 0$:
$x(-x^2 + 2) = 0$. $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$.

$f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$ | $f' < 0$
steigt $-\sqrt{2}$ fällt 0 steigt $\sqrt{2}$ fällt
Max Min Max

Max$(-\sqrt{2}|1)$, Min$(0|0)$, Max$(\sqrt{2}|1)$
W: $f''(x) = -3x^2 + 2$.
$f''(x) = 0$: $x_{1/2} \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$

$f'' < 0$ | $f'' > 0$ | $f'' < 0$
rechts- $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ links- $\sqrt{\frac{2}{3}}$ rechts-gekrümmt
WP WP

WP$(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{5}{9})$



Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-2|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2|3)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|0)$
Wertebereich: $W =]-\infty; 1]$

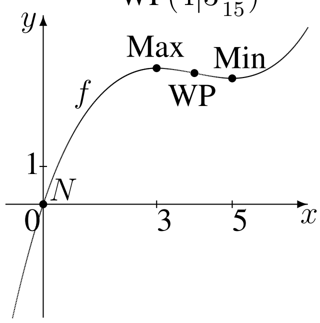
2.
$f'(x) = x - 1$
$f(x_0) = f(5) = 4{,}5$, also $P_0(5|4{,}5)$.
Tangentensteigung $f'(x_0) = f'(5) = 4$.
Erster Näherungswert und neuer Startwert:
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \frac{4{,}5}{4} = 3{,}875$.
Zweiter Iterationsschritt:
$f(x_1) = f(3{,}875) \approx 0{,}6328$, Tangentensteigung $f'(x_1) = f'(3{,}875) = 2{,}875$.
Zweiter Näherungswert:
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 3{,}875 - \frac{0{,}6328}{2{,}875} \approx 3{,}6549$.

3.
$f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x$, $D = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to \pm\infty$: Verlauf von „links unten nach rechts oben".
$f(-x) = -\frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 - 3x$ ist weder $f(x)$ noch $-f(x)$: Keine spezielle Symmetrie
N: $f(x) = 0$: $x(\frac{1}{15}x^2 - 0{,}8x + 3) = 0$. $x_1 = 0$,
$x_{2/3} = \frac{0{,}8 \pm \sqrt{0{,}64 - 4\cdot\frac{1}{15}\cdot 3}}{2\cdot\frac{1}{15}}$ ↯
E: $f'(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 - 4\cdot 0{,}2\cdot 3}}{2\cdot 0{,}2}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 3$

$f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$
steigt 3 fällt 5 steigt
Max$(3|3{,}6)$ Min$(5|3\frac{1}{3})$

W: $f''(x) = 0{,}4x - 1{,}6$. $f''(x) = 0$: $x = 4$

$f'' < 0$ | $f' > 0$
rechts- 4 links- gekrümmt
WP$(4|3\frac{7}{15})$



Schnitt mit x- und y-Achse: $(0|0)$

Wertebereich: $W = \mathbb{R}$

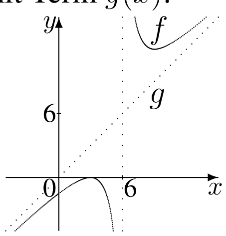
4.
$f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x + 2$
$f'(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3$
$x_0 = -1$. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, also
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{-\frac{28}{15}}{4{,}8} = -\frac{11}{18} \approx -0{,}6111$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx -\frac{11}{18} - \frac{-0{,}1473}{4{,}0525} \approx -0{,}5748$.
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx -0{,}5745$.
Wenn bei $x_0 \geq 3$ eine Tangente gelegt wird, verläuft die Tangente dann eventuell sehr flach oder sogar waagrecht, sodass sie ihre Nullstelle sehr weit außen bei einem ganz anderen x-Wert oder sogar gar nicht hat.
Formal: Sehr kleiner Nenner $f'(x_0)$, z. B kann bei $x_0 = 3$ nicht durch $f'(x_0) = 0$ dividiert werden.

11. Klasse Lösungen — 11
Kompakt-Überblick zum Grundwissen — K

1.
• $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{0,3(x^2+x-2)}{-0,5x^2-2x+7} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{0,3+\frac{1}{x}-\frac{0,6}{x^2}}{-0,5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}} = \frac{0,3}{-0,5} = -0,6$
• Linksseitig $\lim\limits_{x\to 11-0}(-x+11) = 0$, rechts $\lim\limits_{x\to 11+0}(x-11) = 0 = f(11)$, also stetig.
• $c(-x) = (-x)^3 \cdot \cos((-x)^3)$
$= -x^3 \cdot \cos(-x^3) = -x^3 \cdot \cos x^3 = -c(x)$, also punktsymmetrisch zum Ursprung.

2.
Die x^4-Funktion wird um a nach links verschoben und in x-Richtung 3-fach gestreckt.

3.
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{6\}$. $\lim\limits_{x\to 6\pm 0} \frac{(x-3)^2}{x-6} =$ " $\frac{9}{\pm 0)}$ " $\to \pm\infty$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+9}{x-6} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-6+\frac{9}{x}}{1-\frac{6}{x}} \to \pm\infty$.
Wegen „Zählergrad = Nennergrad+1“ gibt es eine schräge Asymptote mit Term $g(x)$:
$f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-6} =$
$= \underbrace{x}_{g(x)} + \underbrace{\frac{9}{x-6}}_{\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty}$.
Skizze mit der (Zähler!) doppelten Nst $x = 3$:



4.
B: Kunde kauft Buch; D: Kunde kauft DVD.

	B	$\overline{B}$	
D	0,01	0,14	**0,15**
$\overline{D}$	0,05	**0,80**	0,85
	0,06	0,94	**1**

Fett gedruckte Felder der Viereldertafel zuerst, dann die anderen zeilen- bzw. spaltenweise ergänzen.

$P_B(D) = \frac{P(D\cap B)}{P(B)} = \frac{0,01}{0,06} \approx 0,17$

5.
$A = \{(-2,2), (-1,1), (1,-1), (2,-2)\}$, also $P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{9}$.
$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$
$A\cap B = \{(-1,1), (1,-1)\}$; $P(A\cap B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(B)$, q. e. d.

6.
(a) b hat einen Knick bei $x = 11$, so dass dort die Tangente nicht definiert ist.
(b) $f'(x) = -2x + 7$.
(c) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

7.
$f'(x) = 6x^2 - 24x + 25$. $P(3|1)$.
Tangentensteigung $m = f'(3) = 7$.
Tangenten-Ansatz $y = mx + t = 7x + t$.
P einsetzen: $1 = 7\cdot 3 + t$, also $t = -20$.
Somit Tangente $y = 7x - 20$.

8.
$f'(x) = 6x^2 - 24x + 25 = 0$, also $x_{1/2} = \frac{24\pm\sqrt{576-4\cdot 6\cdot 25}}{2\cdot 6}$ ↯. Da $f'(x) > 0$ für alle x, ist f streng monoton steigend. Keine Extrema.
Bei $f_1'(x) = 6x^2 - 24x + 24 = 0$ ist $x_{1/2} = \frac{24\pm 0}{2\cdot 6} = 2$, es ergibt sich ein Terrassenpunkt:

$f_1'(x) > 0$ | $f_1' > 0$
steigt | 2 | steigt

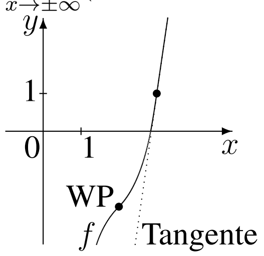
Bei $f_2'(x) = 6x^2 - 24x + 23 = 0$ gibt es zwei einfache Lösungen $x_{1/2}$ mit Vorzeichenwechel, also zwei Extrema.

9.
$f''(x) = 12x - 24 = 0$, $x = 2$

$f_1''(x) < 0$ | $f_1'' > 0$
rechts- | 2 | links- gekrümmt

Also WP$(2|-2)$.
Verschiebt man den Graphen so, dass der WP im Ursprung liegt, also 2 nach links und 2 nach oben, so erhält man für $h(x) = f(x+2) + 2 = 2(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + 25(x+2) - 20 + 2$ nach Ausmultiplizieren (ergibt $h(x) = 2x^3 + x$) eine punktsymmetrische Funktion.

10.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x^3 - 12x^2 + 25x - 20) \to \pm\infty$.



Wertebereich
$W = \mathbb{R}$

Nullstelle: Newton-Verfahren (Startwert, günstig ist laut Skizze z. B. $x_0 = 3$ dann Iterationsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.