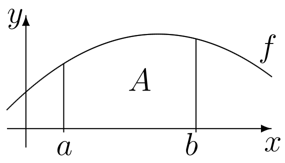
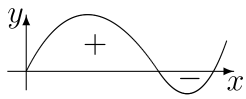
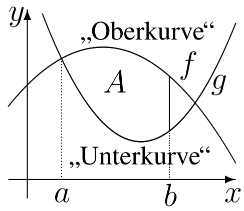
12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Integration — 01



$A = \int\limits_a^b f(x)dx$ kann veranschaulicht werden als **Fläche** unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$, genauer: als Flächenbilanz, wobei Flächen oberhalb der x-Achse positiv zählen, unterhalb der x-Achse negativ.



Flächen zwischen zwei Kurven:
„Oberkurve minus Unterkurve“: $A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$



Näherungsweise können Flächen auch durch Zerlegung in Streifen und die entsprechende Summe der Streifenflächen berechnet werden (→ ueb121.pdf, Aufgabe 1).

Zur Berechnung von $A = \int\limits_a^b f(x)\,dx$:
Zuerst besorgt man sich eine **Stammfunktion** F, d. h. eine Funktion, deren Ableitung $F'(x)$ den Integranden f ergibt (weitere Hinweise → grund112.pdf, grund117.pdf, grund118.pdf und siehe unten; Hauptsatz und Begriff „Integralfunktion“ → grund122.pdf).

Beispiel: $f(x) = x^2 - 10$; dann ist $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$ (Kontrolle durch Differenzieren!)

Nun wertet man die Stammfunktion aus durch Einsetzen „Obergrenze minus Untergrenze“:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel (Klammern setzen, Vorzeichen beachten!):
$\int\limits_{-1}^{3} (x^2 - 10)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 10x\right]_{-1}^{3} = \frac{3^3}{3} - 10 \cdot 3 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 10 \cdot (-1)\right] = 9 - 30 + \frac{1}{3} - 10 = -\frac{92}{3}$

Merke Stammfunktionen:

$f(x)$	1	x	x^2	x^n für $n \neq -1$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{N'(x)}{N(x)}$	$v'(x)e^{v(x)}$	$\sin x$
$F(x)$	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\ln \lvert N(x) \rvert$	$e^{v(x)}$	$-\cos x$

Tricks:

- Ausdrücke von der Sorte $\frac{1}{x^3}$ oder $\sqrt{x}$ kann man als x^{-3} bzw. $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben und mit der x^n-Formel die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$ bzw. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ finden.
- Bei Brüchen mit einfachem Nenner ist es manchmal günstig, sie „auseinanderzuziehen“, z. B. bei $f(x) = \frac{3x^4+2x^2+x}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$.
  Also Stammfunktion: $F(x) = x^3 + 2x + \ln |x|$.
- In Prüfungsaufgaben steht die Stammfunktion manchmal schon da und man muss durch Differenzieren (→ grund116.pdf) lediglich nachweisen, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist.

  Manchmal hat man in vorhergehenden Aufgaben Umformungen gemacht, die das Integrieren wesentlich erleichtern.
  Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = (x^2 - 4) : (x + 1) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ (Polynomdivision!)
  Also Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3\ln |x + 1|$.