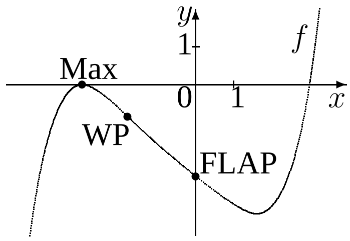
12. Klasse TOP 10 Grundwissen	12
Wendepunkte, Integralfunktionen	02

Krümmung und Wendepunkte
$f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln ($\rightarrow$ grund107.pdf, dabei ggf. auch Definitionslücken markieren)
Krümmung: $f'' > 0$: Graph ist in diesem Bereich linksgekrümmt; $f'' < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen bei $f''(x) = 0$: **Flachpunkt**; bei Vorzeichenwechsel von f'' sogar **Wendepunkt**; wenn zusätzlich zum Vorzeichenwechsel dort $f'(x) = 0$: **Terrassenpunkt**.
Die y-Koordinate dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in $f(x)$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9) = \frac{1}{100}(x^5 + 3x^4 - 81x - 243)$
$f'(x) = \frac{1}{100}(5x^4 + 12x^3 - 81)$
$f''(x) = \frac{1}{100}(20x^3 + 36x^2)$
$f''(x) = 0$: $\frac{1}{100}x^2(20x + 36) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -1{,}8$.



$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' > 0$	
rechts-	$-1{,}8$	links-	0	links-	gekrümmt
	WP$(-1{,}8\|y)$		FLAP$(0\|0)$		

mit $y = f(-1,8) \approx -0{,}85$

Unter einer **Wendetangente** versteht man die Tangente im Wendepunkt.

Kriterium für Extrema ($\rightarrow$ grund113.pdf) mit Hilfe der zweiten Ableitung f'':
Bekanntlich genügt $f'(x) = 0$ noch nicht für das Vorliegen eines Extremums, sondern es muss noch ein Vorzeichenwechsel (VZW) von f' vorliegen. Alternativ zur Vorzeichenbetrachtung kann man die in Frage kommenden x-Werte in $f''(x)$ einsetzen. Ist dann an einer solchen Stelle $f''(x) > 0$, so ist dort der Graph linksgekrümmt, d. h. es handelt sich um ein Minimum, bei $f''(x) < 0$ entsprechend um ein Maximum.
Ist an einer solchen Stelle $f''(x) = 0$, so muss man doch die Vorzeichenbereiche untersuchen.
In obigem Beispiel $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9)$ ist
$f'(-3) = \frac{1}{100}(5 \cdot (-3)^4 + 12 \cdot (-3)^3 - 81) = 0$ und
$f''(-3) = \frac{1}{100}(20 \cdot (-3)^3 + 36 \cdot (-3)^2) = -2{,}16 < 0$ und daher $x = -3$ eine Maximalstelle.

Integralfunktion
Bei fester unterer Grenze a und variabler oberer Grenze x erhält man durch $I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ eine Integralfunktion.
Beispiel: Eine Integralfunktion zu $f(t) = \frac{1}{4}t + 3$ ist z. B. (bei $a = -4$) gegeben durch
$I(x) = \int\limits_{-4}^{x} (\frac{1}{4}t + 3)dt = \left[\frac{1}{8}t^2 + 3t\right]_{-4}^{x} = \frac{1}{8}x^2 + 3x - (\frac{1}{8} \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4)) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 10.$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion, d. h. $I'(x) = f(x)$.
In obigem Beispiel mit $I(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 10$ ist $I'(x) = \frac{1}{4}x + 3 = f(x)$.
Die Begriffe Integralfunktion und Stammfunktion sind jedoch verschieden: Eine Integralfunktion hat stets mindestens eine Nullstelle (nämlich untere Grenze $x = a$), eine Stammfunktion muss jedoch diese Eigenschaft nicht haben.

Zusammenhänge zwischen Eigenschaften einer Stammfunktion F und $f = F'$

Eig. der Stammfkt. F	Formaler Zusammenhang	Eig. von f an einer Stelle x
F hat Extremum	$F'(x) = f(x) = 0$ mit VZW	f hat Nullstelle mit VZW
F hat Wendepunkt	$F''(x) = f'(x) = 0$ mit VZW	f hat Extremum