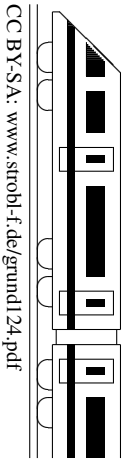


12. Klasse TOP 10 Grundwissen	12
Wahrscheinlichkeitsverteilungen	04



Grundbegriffe

(Laplace → grund88.pdf, Vierfeldertafel → grund95.pdf, Pfadregeln → grund102.pdf, bedingte Wahrscheinlichkeit → grund114.pdf, verknüpfte Ereignisse, Unabhängigkeit → grund115.pdf):

Alle möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments werden als Elemente eines **Grundraums** Ω zusammengefasst, dessen Teilmengen E die sog. **Ereignisse** sind. Jedem Ereignis E ist seine **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ zugeordnet. Diese Zuordnung P muss die **Kolmogorow-Axiome** (→ ueb124.pdf, Aufgabe 1) erfüllen, aus denen die folgenden **Regelungen** folgen:

\bar{E} (Komplement, Gegenereignis, nicht- E): $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$E_1 \cup E_2$ (E_1 oder E_2 ; mindestens eines der Ereignisse tritt ein): Additionssatz $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Im Fall von **Unabhängigkeit** gilt für $E_1 \cap E_2$ (E_1 und E_2 , **beide** Ereignisse treten ein): $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Zufallsgrößen ordnen jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu.

Beschreibt zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln die Zufallsgröße X die Anzahl der geworfenen geraden Zahlen, so ist dem Ergebnis $(3; 5)$ die Anzahl 0 zuzuordnen, also $X((3; 5)) = 0$, ebenso $X((2; 5)) = 1$.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(X = a)$ die jeweiligen Werte a auftreten.

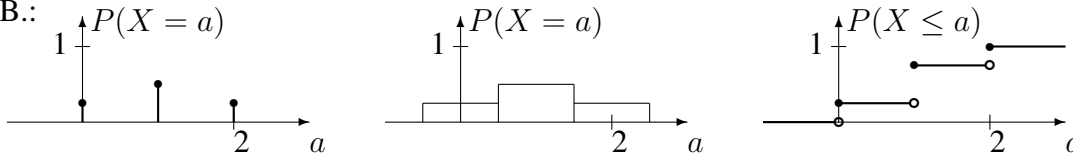
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln für die Anzahl X der geraden Zahlen:

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen können veranschaulicht werden durch:

Stabsäulendiagramm, Histogramm, kumulative Verteilungsfunktion $f(a) = P(X \leq a)$,

z. B.:



Der **Erwartungswert** $\mu = E(X)$ gibt einen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert an: $\mu = E(X) = \sum_a a \cdot P(X = a)$.

Die **Varianz** $\sigma^2 = V(X)$ und die **Streuung (Standardabweichung)** $\sigma = \sqrt{V(x)}$ sind Maße für die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert: $\sigma^2 = V(X) = \sum_a (a - \mu)^2 \cdot P(X = a)$.

In obigem Beispiel: $\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{1}{3}$,
 $\sigma^2 = V(X) = (0 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{25}{36} + (1 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{10}{36} + (2 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

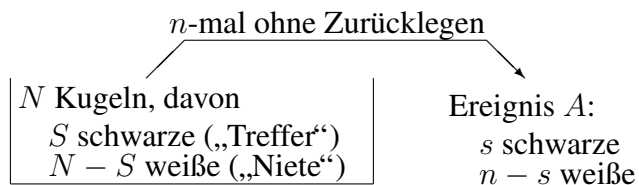
Wichtig zum Verständnis der Formeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist der **Binomialkoeffizient**, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus n Objekten eine Teilmenge von k Stück (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Taschenrechner: nCr-Taste.
 Zum Beispiel Lotto 6 aus 49:
 $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13\,983\,816$

Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s} \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$



Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen → grund125.pdf