

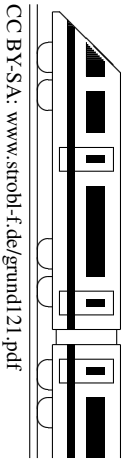
<b>12. Klasse TOP 10 Mathematik</b>	<b>12</b>
<b>Gesamtes Grundwissen mit Übungen</b>	<b>G</b>

Grundwissen Mathematik 12. Klasse: Die 10 wichtigsten Themen auf jeweils einer Seite!

Zum Wiederholen kann man die Übungen des Kompakt-Überblicks verwenden.

12/1	Parameter bei ganzrationalen Funktionen	G	Ü	L
12/2	Differentiationsregeln, Stammfunktion	G	Ü	L
12/3	e-Funktion	G	Ü	L
12/4	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	G	Ü	L
12/5	Binomialverteilung	G	Ü	L
12/6	Test von Hypothesen	G	Ü	L
12/7	Quotientenregel	G	Ü	L
12/8	Umkehrfunktion, Wurzelfunktion	G	Ü	L
12/9	ln-Funktion	G	Ü	L
12/10	Koordinatengeometrie	G	Ü	L
12/K	Kompakt-Überblick zum Grundwissen	G	Ü	L

G=Grundwissen, Ü=Übungen, L=Lösungen



**Kurvenscharen: Funktionsterme mit Parameter** (→ grund112.pdf)

Beim Differenzieren ist zu unterscheiden zwischen der Variablen  $x$ , nach der differenziert wird, und dem Parameter (z. B.  $a, k, t, \dots$ ), der die Rolle einer Konstanten spielt, somit wie eine feste Zahl behandelt wird und nach dem nicht differenziert wird; falls es sich um einen Vorfaktor handelt, bleibt dieser als Vorfaktor also erhalten (z. B. ist die Ableitung von  $2ax^2$  dann  $2a \cdot 2x = 4ax$ ), falls es sich um eine additive Konstante handelt, fällt diese beim Differenzieren weg (z. B. ist die Ableitung von  $x^3 - 2a^3$  dann  $3x^2 - 0 = 3x^2$ ).

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2a^3 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2a \cdot 2x + a^2 = 3x^2 - 4ax + a^2 \\ f''(x) &= 6x - 4a \end{aligned}$$

Je nachdem, welchen Wert man für den Parameter einsetzt, erhält man verschiedene Funktionen, also eine ganze Schar von Kurven, z. B.

$$a = -1: f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 \quad a = 0: f(x) = x^3 \quad a = 1: f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Zum Teil können diese Kurven ganz unterschiedlich aussehen, d. h. bei Funktionsuntersuchungen, die man allgemein mit dem Parameter rechnet, sind eventuell Fallunterscheidungen notwendig.

Beispiel:  $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2a^3$

Punkte mit waagrechter Tangente:  $f'(x) = 0: 3x^2 - 4ax + a^2 = 0;$

$$x_{1/2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot 3 \cdot a^2}}{2 \cdot 3} = \frac{4a \pm 2a}{6}. \quad x_1 = \frac{1}{3}a, \quad x_2 = a. \quad \text{Ob Max oder Min, hängt von } a \text{ ab:}$$

$a < 0$ (Zahlenbeispiel rechnen!):		$a = 0:$	$a > 0:$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
steigt	fällt	steigt	fällt
	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
	steigt	steigt	steigt
	Max	TerrP	Max
	Min	$(0 0)$	Min
	$(a -2a^3)$		$(\frac{1}{3}a -\frac{50}{27}a^3)$

zusammenfassung und Wiederholung spezieller Parameter-Wirkungen auf eine gegebene Funktion  $f$ :

$h_1(x) = f(x) + a$ : Verschiebung um  $a$  nach oben.

$h_2(x) = f(x + a)$ : Verschiebung um  $a$  nach links.

$h_3(x) = af(x)$ : Streckung mit Faktor  $a$  in y-Richtung.

$h_4(x) = f(ax)$ : Stauchung mit Faktor  $\frac{1}{a}$  in x-Richtung.

Insbesondere ist  $h'_1(x) = f'(x)$ , die Steigung bei Verschiebung in y-Richtung also wie zu erwarten unverändert. (→ grund122.pdf: Siehe Begriff „Stammfunktion“).

**Zusammenfassung und Wiederholung der Eigenschaften ganzrationaler Funktionen**

→ grund105.pdf, grund110.pdf, konkretes Beispiel mit Parameter und nähere Hinweise (auch zur Orskurve) siehe ueb121.pdf, Aufgabe 3.

Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$ .

Grenzwert im Unendlichen ablesbar an höchster Potenz und Koeffizienten-Vorzeichen .

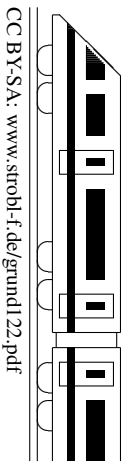
Spezielle Symmetrie: Bei nur geraden Exponenten achsensymmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen:  $f(x) = 0$ , bequem ablesbar bei Verwendung der faktorisierten Form.

Extrema und Monotonie (→ grund118.pdf):  $f'(x) = 0$  und z. B. Betrachtung der Vorzeichenbereiche, ob und welche Art der Extrema vorliegen.

Wendepunkte und Krümmung (→ grund119.pdf):  $f''(x) = 0$  und z. B. Betrachtung der Vorzeichenbereiche, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen.

Nullstellen, Extrema und Wendepunkte werden in Abhängigkeit von einem eventuellen Parameter angegeben.



Allgemeines → grund116.pdf, Parameter → grund121.pdf, Quotientenregel → grund127.pdf

### Ableitungsformeln:

$f(x)$	1	$x$	$x^2$	$x^n$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	1	$2x$	$nx^{n-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$	$\cos x$	$-\sin x$

Viele Funktionen lassen sich auf  $x^n$  zurückführen, z. B.  $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ . Die Ableitung ergibt sich dann mit „alter Exponent ’runter, neuer ist um 1 kleiner“:  $g'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ . In manchen Fällen (insbes. bei Wurzeln → grund128.pdf) kann es sein, dass die Ableitung einen kleineren Definitionsbereich als die Funktion selbst hat. Exponential- und Logarithmusfunktion → grund123.pdf und grund129.pdf. Näheres zu Bruchfunktionen → grund127.pdf.

**Produktregel:**  $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

„Das erste lassen mal das zweite differenzieren plus das erste differenzieren mal das zweite lassen“

Beispiel:  $f(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = x \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$

**Quotientenregel** → grund127.pdf

### Kettenregel:

Begriff der Verkettung von Funktionen:

Beispiel:  $f(x) = \sin(x^2)$  bedeutet: Zuerst  $x^2$  („Inneres“), dann  $\sin$  davon nehmen („äußere Funktion“)

Differenzieren verketteter Funktionen  $f(x) = u(v(x))$ :  $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

„Das Äußere differenzieren und das Innere einsetzen mal das Innere nachdifferenzieren“.

Beispiele:  $f(x) = (x^2 - 5x)^7 \Rightarrow f'(x) = 7(x^2 - 5x)^6 \cdot (2x - 5)$

$$g(x) = \sin(x^2) \Rightarrow g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$h(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$\Rightarrow h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 + (-\sin(x^2) \cdot 2x) \cdot 2x = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$$

Kettenregel  $x^2$  nachdifferenzieren  $\uparrow$   $\uparrow$  Produktregel „zweites lassen“

### Stammfunktion

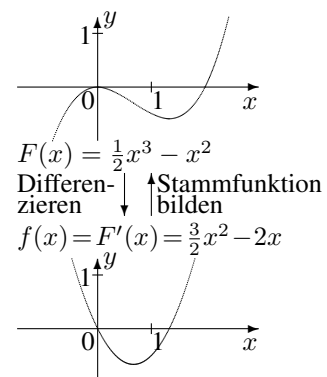
Eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion  $f$  ist eine Funktion  $F$ , deren Ableitung  $f$  ergibt:

$$F'(x) = f(x).$$

$F$  ist daher nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Beispiel:  $f(x) = x^2$  hat die Stammfunktionen  $F_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ ,

z. B.  $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3$  oder  $F_5(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ .



(Hinweise zu speziellen Funktionen → grund123.pdf, grund129.pdf und bei „Integration“).

Merke Stammfunktionen:

$f(x)$	1	$x$	$x^2$	$x^n$ für $n \neq -1$	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	$x$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$-\cos x$	$\sin x$

Beispiele (Kontrolle durch Differenzieren!):

$f(x) = x^2 - 10$ ; dann ist Term der Stammfunktion  $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$

$h(x) = \cos(12x)$ ; dann ist Term der Stammfunktion  $H(x) = \frac{1}{12} \sin(12x)$  (Vorfaktor  $\frac{1}{12}$  zum Ausgleichen des Nachdifferenzierens!)

$f(x) = e^x$  („Natürliche Exponentialfunktion“)

1. Definitionsbereich:  $D_f = \mathbb{R}$  (alle  $x$ -Werte sind erlaubt)

Wertebereich:  $W_f = ]0; \infty[$   
 (es ist  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 somit besitzt die  $e$ -Funktion keine Nullstellen)

2. Spezielle Werte:

$f(0) = e^0 = 1$  (Schnitt mit der  $y$ -Achse),  
 $f(1) = e^1 = e \approx 2,718$  (Eulersche Zahl  $e$ )

Taschenrechner: Meist SHIFT-ln.

Beispiel:  $e^{0,5} \approx 1,649$ ,  $e = e^1 \approx 2,718$

3. Es gelten die bekannten Potenz-Rechenregeln,  
 also z. B.  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ,  $e^{2+x} = e^2 \cdot e^x$ ,  $e^{2x} = (e^x)^2$

4. Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  (d. h. die negative  $x$ -Achse ist Asymptote)

Die  $e$ -Funktion konvergiert stärker als jedes Polynom, also

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \rightarrow \infty$

5. Ableitung:  $f'(x) = e^x$  („Die  $e$ -Funktion reproduziert sich.“)

Somit ist  $f'(x) > 0$ , d. h. der Graph steigt streng monoton.

6. Ist der Exponent nicht einfach  $x$ , so muss beim Differenzieren nachdifferenziert werden. Beispiel:

$$g(x) = e^{-2x}, \quad g'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$$

(„ $e$ -Funktion reproduziert sich mal das Innere (also  $-2x$ ) nachdifferenziert“)

7. Stammfunktion:  $F(x) = e^x + C$  ist Stammfunktion von  $f(x) = e^x$ .

$$F_1(x) = e^{v(x)} + C \text{ ist Stammfunktion von } f_1(x) = v'(x)e^{v(x)}.$$

8. Term der Umkehrfunktion:  $\ln x$

Somit ist  $e^{\ln x} = x$  und  $\ln e^x = x$ .

9. Lösen von Exponentialgleichungen durch beidseitiges Logarithmieren: Beispiel:

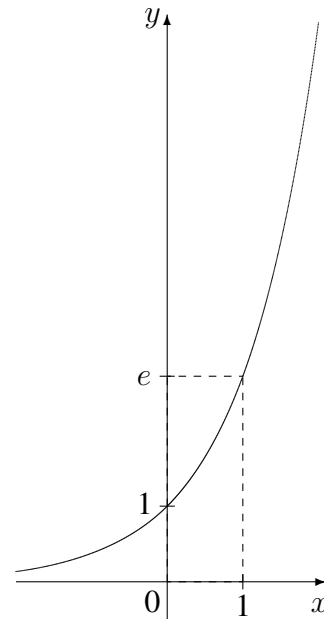
$$\begin{aligned} e^x &= 2 & | \ln \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

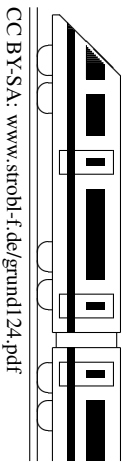
10. Lösen von Gleichungen mit Produkt vom Typ  $(3x + 4)e^{x-1} = 0$ :

Da  $e^{\dots}$  stets positiv ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch  $e^{\dots}$  dividieren (in obigem Beispiel steht dann  $3x + 4 = 0$  als leicht zu lösende Gleichung).

11. Für die allgemeine Exponentialfunktion  $h_a(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , Basis  $a > 0$ , gilt  $h_a(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$  und daher  $h'_a(x) = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$ .

Somit ist  $h'_a(0) = \ln a$  und die Eulersche Zahl  $e \approx 2,718$  als Basis der natürlichen Exponentialfunktion ist diejenige, bei der  $h'_e(0) = 1$  gilt.





**Grundbegriffe**

(Laplace → grund88.pdf, Vierfeldertafel → grund95.pdf, Pfadregeln → grund102.pdf, bedingte Wahrscheinlichkeit → grund114.pdf, verknüpfte Ereignisse, Unabhängigkeit → grund115.pdf):

Alle möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments werden als Elemente eines **Grundraums**  $\Omega$  zusammengefasst, dessen Teilmengen  $E$  die sog. **Ereignisse** sind. Jedem Ereignis  $E$  ist seine **Wahrscheinlichkeit**  $P(E)$  zugeordnet. Diese Zuordnung  $P$  muss die **Kolmogorow-Axiome** (→ ueb124.pdf, Aufgabe 1) erfüllen, aus denen die folgenden **Rechenregeln** folgen:

$\bar{E}$  (Komplement, Gegenereignis, nicht- $E$ ):  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$E_1 \cup E_2$  ( $E_1$  oder  $E_2$ ; mindestens eines der Ereignisse tritt ein): Additionssatz  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Im Fall von **Unabhängigkeit** gilt für  $E_1 \cap E_2$  ( $E_1$  und  $E_2$ , **beide** Ereignisse treten ein):  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

**Zufallsgrößen** ordnen jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu.

Beschreibt zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln die Zufallsgröße  $X$  die Anzahl der geworfenen geraden Zahlen, so ist dem Ergebnis  $(3; 5)$  die Anzahl 0 zuzuordnen, also  $X((3; 5)) = 0$ , ebenso  $X((2; 5)) = 1$ .

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $P(X = a)$  die jeweiligen Werte  $a$  auftreten.

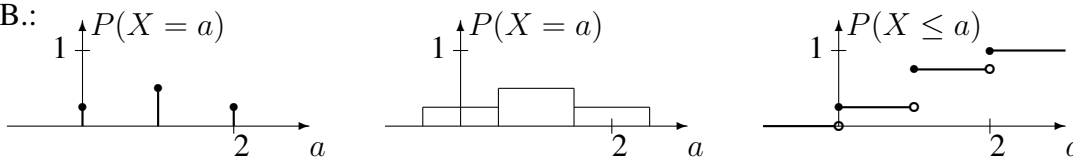
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln für die Anzahl  $X$  der geraden Zahlen:

$a$	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen können veranschaulicht werden durch:

Stabsäulendiagramm, Histogramm, kumulative Verteilungsfunktion  $f(a) = P(X \leq a)$ ,

z. B.:



Der **Erwartungswert**  $\mu = E(X)$  gibt einen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert an:  $\mu = E(X) = \sum_a a \cdot P(X = a)$ .

Die **Varianz**  $\sigma^2 = V(X)$  und die **Streuung (Standardabweichung)**  $\sigma = \sqrt{V(x)}$  sind Maße für die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert:  $\sigma^2 = V(X) = \sum_a (a - \mu)^2 \cdot P(X = a)$ .

In obigem Beispiel:  $\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{1}{3}$ ,  
 $\sigma^2 = V(X) = (0 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{25}{36} + (1 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{10}{36} + (2 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$ .

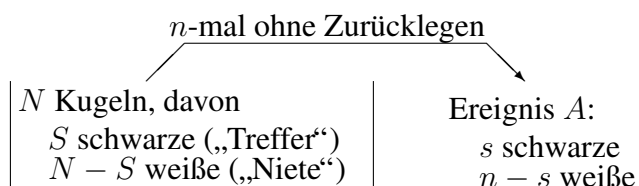
Wichtig zum Verständnis der Formeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist der **Binomialkoeffizient**, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus  $n$  Objekten eine Teilmenge von  $k$  Stück (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

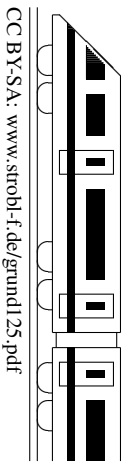
Taschenrechner: nCr-Taste.  
 Zum Beispiel Lotto 6 aus 49:  
 $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13\,983\,816$

**Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen**

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s} \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$



**Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen** → grund125.pdf



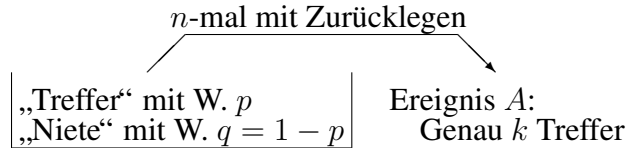
Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen → grund124.pdf

**Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen**

Ein Bernoulli-Experiment (zwei Versuchsausgänge: Treffer und Niete, Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ ) wird  $n$ -mal unabhängig durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge  $n$  zum Parameter  $p$ ). Für die Zufallsgröße  $X$ : Trefferzahl ist die Wahrscheinlichkeit, **genau**  $k$  Treffer zu erhalten, ist dann

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

(Binomialverteilung → Stochastik-Tafel linke Spalte).



Die Wahrscheinlichkeit, **höchstens**  $k$  Treffer zu erhalten, ist

$$P_{n,p}(X \leq k) = B(n; p; 0) + B(n; p; 1) + \dots + B(n; p; k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$$

(Verteilungsfunktion → Stochastik-Tafel rechte Spalte)

**Beispiel 1:**

Bei einer bestimmten Telefon-Gesellschaft kommen 96 % aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 10 Gespräche erledigen. Treffer: „kommt durch“,  $p = 0,96$ ,  $n = 10$ .

Zu betrachten:  $A$ : „kommt genau einmal nicht durch“,  $B$ : „kommt mindestens achtmal durch“,  $C$ : „beim achten Versuch der dritte Treffer“.

$A$ : d. h. genau 9 Treffer:  $P(A) = B(10; 0,96; 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,96^9 \cdot 0,04 = 0,27701$  (oder Tafel).

$B$ : Komplement  $\bar{B}$ : „höchstens sieben Treffer“. Mit Tafel oder Taschenrechner:  $P(B) = P_{n=10,p=0,96}(k \geq 8) = 1 - P_{n=10,p=0,96}(k \leq 7) = 1 - 0,00621 = 0,99379$

$C$ : Hier formuliert man um: Zuerst genau zwei Treffer in den ersten sieben Versuchen, dann Treffer, also  $P(C) = B(7; 0,04; 2) \cdot 0,04 = 0,02740 \cdot 0,04 = 0,0011$ .

**Beispiel 2:**

Wie oft **mindestens** muss das Experiment durchgeführt werden, um mit **mindestens** 90 % Wahrscheinlichkeit **mindestens einmal** nicht durchzukommen, wenn die Wahrscheinlichkeit hierfür 0,04 beträgt?

Hier notiert man einen Ansatz („Soll gelten:  $P_{n=?,p=0,04}(k \geq 1) \geq 0,90$ “), geht zum Komplement über („ $P_{n=?,p=0,04}(k = 0) \leq 1 - 0,90$ , d. h.  $0,96^n \leq 0,10$ “) und löst die entstehende Exponentialgleichung durch beidseitiges Logarithmieren („ $n \ln 0,96 \leq \ln 0,10$ , d. h.  $n \geq \frac{\ln 0,10}{\ln 0,96} \approx 56,4$ , also  $n \geq 57$ “).

**Erwartungswert und Varianz:**  $\mu = E(X) = np$ ,  $\sigma^2 = npq = np(1 - p)$ .

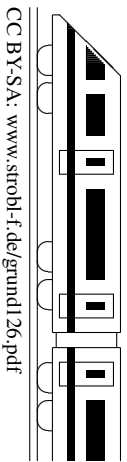
**Beispiel zum Umgang mit dem Taschenrechner:**

Bei manchen Taschenrechnern können mit einer MODE- oder MENU-Taste Verteilungen (DIST) gewählt werden; dann Binomial PD oder Binomial-Dichte für „genau“- , SHIFT-Cursor↓ Binomial CD oder Bino.P( $0 \leq x \leq k$ ) für „höchstens“-Wahrscheinlichkeiten; bei Wahl einer Liste gibt man zuerst die gewünschten Werte von  $k$  und nach nochmaliger „=“-Taste die Werte von  $n$  und  $p$  ein. Ist z. B. eine Zahl  $k$  gesucht mit  $P_{n=200,p=0,04}(X \leq k) \geq 0,95$ , so sucht man in der Nähe von  $\mu + 1,64\sigma \approx 200 \cdot 0,04 + 1,64\sqrt{50} \cdot 0,04 \cdot 0,96 \approx 12,5$  und erhält aus der nebenstehenden Tabelle  $k = 13$ . (Zum Wert 1,64: Siehe 13. Klasse Normalverteilung und Sigma-Regeln im Formeldokument.)

$k$	$\sum_{i=1}^k B(200; 0,04; i)$
11	0,8925
12	0,9401
13	0,9688
14	0,9848

**Umgang mit Histogrammen bei binomialverteilten Zufallsgrößen:**

Das Histogramm ist zwar (außer bei  $p = 0,5$ ) nicht symmetrisch, aber der höchste Wert ist bei der zum Erwartungswert  $\mu$  nächstkleineren oder nächstgrößeren Trefferzahl.



**Beispiel:**

Eine Telefongesellschaft behauptet, in (mindestens) 97 % der Fälle eine freie Leitung bieten zu können. Es werden 200 Testanrufe durchgeführt. Bei welchem Versuchsausgang kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (Testniveau) von 5 % („95 % Sicherheit“) von einer unwahren Aussage sprechen?

**Einseitiger Test:**

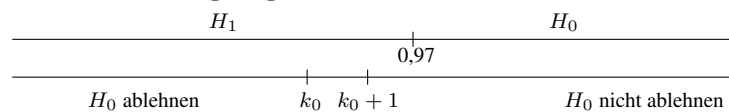
**Treffer:** Freie Leitung. Trefferw.  $p$  unbekannt. Bernoullikette der Länge  $n = 200$ .

**Nullhypothese**  $H_0: p \geq 0,97$

**Alternative**  $H_1: p < 0,97$  („Die Telefongesellschaft lügt“)

Ein Test besteht in der Angabe einer **Entscheidungsregel** (ER).

ER:  $H_0$  ablehnen, falls  
Trefferzahl  $k \leq k_0$ .



Liegt das Versuchsergebnis im Ablehnungsbereich, so wird  $H_0$  verworfen („signifikante“ Entscheidung für  $H_1$ ); andernfalls kann man  $H_0$  nicht verwerfen.

Beim Entscheidungsverfahren können **Fehler** auftreten:

Entscheidung	$H_0$ nicht abgelehnt	$H_0$ abgelehnt
Realität		
$H_0 : p \geq 0,97$	Richtiges Urteil	$\alpha$ - <b>Fehler</b> (Fehler 1. Art) Schwerer Irrtum (Zu Unrecht Vorwurf der Lüge)
$H_1 : p < 0,97$	$\beta$ -Fehler (Fehler 2. Art) Irrtum (zugunsten der Tel.ges.)	Richtiges Urteil

Die ER wird so festgelegt, dass der schwere  $\alpha$ -Fehler ( $H_0$  abgelehnt, obwohl wahr) kleiner als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit ist:

$$\alpha = \underbrace{P_{n=200, p=0,97} ( k \leq k_0 )}_{H_0 \text{ abgelehnt } \dots} \leq 0,05$$

... obwohl  $H_0$  wahr

Mit dem Stochastik-Tafelwerk oder dem Taschenrechner folgt  $k_0 = 189$ .

Die ER lautet also:  $H_0$  ablehnen, falls Trefferzahl  $k \leq 189$  („kritischer Bereich“).

Der  $\beta$ -Fehler hängt davon ab, welches  $p$  tatsächlich vorliegt. Ist z. B.  $p = 0,95$ , so ist der  $\beta$ -Fehler (die Telefongesellschaft für gut zu halten, obwohl sie es nicht ist):

$$\begin{aligned} \beta &= P_{n=200, p=0,95} („H_0 \text{ nicht abgelehnt“}) = P_{n=200, p=0,95} (k \geq k_0 + 1) \\ &= 1 - P_{n=200, p=0,95} (k \leq 189) = 1 - 0,41693 \approx 0,58 \end{aligned}$$

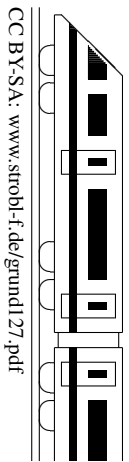
Die Wahl der Nullhypothese hängt von der Interessenlage ab, d. h. welchen Fehler man als  $\alpha$ -Fehler unter Kontrolle haben möchte. Im Zweifelsfall hat in Prüfungen der Angabentext Vorrang; sonst wählt man als  $H_0$  das, was man mit Sicherheit ablehnen möchte, und als Alternative  $H_1$  das, was man beweisen möchte.

**Hinweise:**

In obigem Beispiel liegt ein linksseitiger Test vor, da das „zu beweisende“  $H_1$  links von  $H_0$  liegt.

Bei einem rechtsseitigen Test (also von der Bauart  $H_0 : p \leq p_0, H_1 : p > p_0$ ) hat man entsprechend eine Entscheidungsregel der Form „ $H_0$  ablehnen, falls Trefferzahl  $k \geq k_0$ “ und muss nach Aufstellen des  $\alpha$ -Fehlers zur Berechnung von  $k_0$  zuerst zum Komplement  $P(k \leq k_0 - 1)$  übergehen.

Zum Umgang mit dem Taschenrechner siehe grund 125.pdf.



**Quotientenregel:**  $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{[n(x)]^2} = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}$

(„Nenner mal Ableitung des Zählers minus Zähler mal Ableitung des Nenners durch Nenner im Quadrat“)

Beispiel:  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - 5) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{x^4 - 15x^2}{(x^2 - 5)^2}$

**Tips:** Beim Ausmultiplizieren des Zählers eventuelle Minusklammer beachten; Nenner nicht ausmultiplizieren; bei nochmaligem Differenzieren kürzen, z. B. hier:

$$f''(x) = \frac{(x^2-5)^2 \cdot (4x^3-30x) - (x^4-15x^2) \cdot 2(x^2-5) \cdot 2x}{(x^2-5)^4} = \frac{(x^2-5)(4x^3-30x) - (x^4-15x^2) \cdot 4x}{(x^2-5)^3} = \frac{10x^3+150x}{(x^2-5)^3}$$

Manchmal lässt sich ein Nenner bequemer mit „hoch  $-1$ “ schreiben oder „auseinanderziehen“, Beispiel:  $f(x) = \frac{x^2-5}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3} = x^{-1} - 5x^{-3}$ ,  $f'(x) = -x^{-2} - 5 \cdot (-3)x^{-4}$ .

In den Fällen, in denen im Nenner keine Summe/Differenz steht, kann die Anwendung der Quotientenregel somit vermieden werden wie im letzten Beispiel mit der Ableitungsregel  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , da diese Regel auch für negative Exponenten gilt. Umgekehrt hat z. B.  $h(x) = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$  die Stammfunktion  $H(x) = \frac{1}{-6}x^{-6}$ .

Ebenso kann in den Fällen, in denen im Zähler eine Konstante steht, mit der Kettenregel abgeleitet werden, Beispiel:  $j(x) = \frac{12}{x^2-5x}$  mit Umformung  $j(x) = 12(x^2 - 5x)^{-1}$ :

Mit Quotientenregel:  $j'(x) = \frac{(x^2-5x) \cdot 0 - 12 \cdot (2x-5)}{(x^2-5x)^2} = \frac{-12(2x-5)}{(x^2-5x)^2}$  (Man beachte im Zähler die Multiplikation mit 0).

Mit Kettenregel und Umformung:  $j'(x) = 12 \cdot (-1)(x^2 - 5x)^{-2} \cdot (2x - 5) = \frac{-12(2x-5)}{(x^2-5x)^2}$ .

**Beispiel: Untersuchung („Diskussion“) der Bruchfunktion**  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$

(Siehe auch grund110.pdf)

Definitionsbereich: Wegen des Nenners ist  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Asymptoten: Wegen  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  ist  $y = 0$  waagrechte Asymptote;

wegen des Nenners ist  $x = 0$  senkrechte Asymptote (Pol 3. Ordnung) mit  $\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x) \rightarrow \mp\infty$

Symmetrie:  $f(-x) = -f(x)$ , also Punktsymmetrie zum Ursprung.

Nullstellen:  $f(x) = 0$ ;  $3x^2 - 1 = 0$ ;  $x_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,58$

Extrema und Monotonie:  $f'(x) = \frac{x^3 \cdot 6x - (3x^2 - 1) \cdot 3x^2}{x^6} \stackrel{\text{kürzen!}}{=} \frac{-3x^2 + 3}{x^4}$

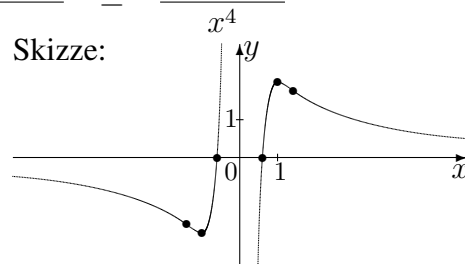
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$f' < 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
fällt	steigt	steigt	fällt

Min (-1   -2)	$\notin D_f$	Max (1   2)
------------------	--------------	----------------

↙ Durch Einsetzen von  $-1$  in  $f(x)$

Skizze:



Zur Vorzeichenbestimmung beachte man, dass hier bei  $f'$  der Nenner stets  $\geq 0$  ist und somit das Vorzeichen vom Zähler „gemacht“ wird.

Wertebereich (d. h. vorkommende  $y$ -Werte):  $W_f = \mathbb{R}$

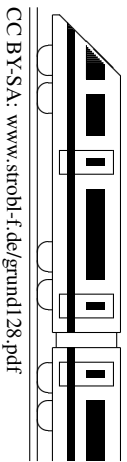
Krümmung und Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{x^4 \cdot (-6x) - (-3x^2 + 3) \cdot 4x^3}{x^8} \stackrel{\text{kürzen!}}{=} \frac{-6x^2 - (-3x^2 + 3) \cdot 4}{x^5} = \frac{6x^2 - 12}{x^5}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{2}$$

$f'' < 0$	$f'' > 0$	$f'' < 0$	$f'' > 0$
rechts-	links-	rechts-	links-
	gekrümmt		

WP ( $-\sqrt{2}$   $-\frac{5}{2\sqrt{2}}$ )	$\notin D_f$	WP ( $\sqrt{2}$   $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ )
--	--------------	--



**Wurzelfunktion**

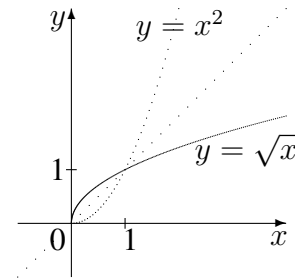
Die Wurzelfunktion  $f$  mit  $y = \sqrt{x}$  ist die Umkehrfunktion (siehe unten) zur Quadratfunktion mit  $y = x^2, x \geq 0$ .

Definitionsbereich:  $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$ .

Funktionsgraph: Halbparabel (siehe Skizze).

Schreibweise mit Potenz:  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ .

Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, D_{f'} = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[$ , wobei für  $x = 0$  eine senkrechte Tangente vorliegt und daher zwar der  $y$ -Wert  $f(0) = \sqrt{0} = 0$  für den Punkt  $(0|0)$  definiert ist, aber nicht die Ableitung, sodass die Definitionsbereiche von  $f$  und  $f'$  verschieden sind.



Entsprechendes gilt für  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ .

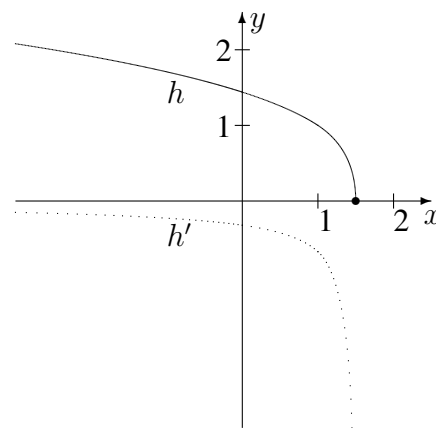
Beispiel 1:  $h(x) = \sqrt[3]{3 - 2x}$ .

Definitionsbereich: Zu fordern ist  $3 - 2x \geq 0$ , also  $-2x \geq -3$ , also  $x \leq 1,5$ , somit  $D_h = ]-\infty; 1,5]$ .

$h(x) = (3 - 2x)^{\frac{1}{3}}$ .

$h'(x) = \frac{1}{3}(3 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-2x)^2}}$ ,

$D_h = ]-\infty; 1,5[$



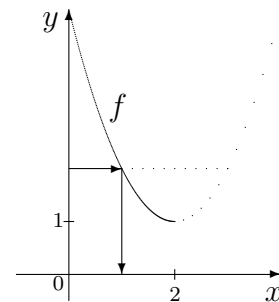
Beispiel 2:  $j(x) = \sqrt{\sin x^2} \Rightarrow j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

**Umkehrfunktion**

Beispiel: Gesucht ist die Umkehrfunktion zu

$f(x) = x^2 - 4x + 5, D_f = ]-\infty; 2], W_f = [1; \infty[$

Umkehrung bedeutet, zu jedem  $y$ -Wert jetzt umgekehrt den  $x$ -Wert zu finden; damit dies eindeutig möglich ist, muss bei der hier vorliegenden quadratischen Funktionsgleichung der Definitionsbereich eingeschränkt werden, z. B. auf den linken Parabelast wie in der Skizze.



Gleichung schreiben:  $y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2, y \geq 1$

Variablentausch  $x \leftrightarrow y$  (auch bei  $D_f, W_f$ ):  $x = y^2 - 4y + 5, y \leq 2, x \geq 1$

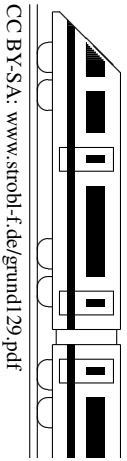
Nach  $y$  auflösen:  $y^2 + 4y + 5 - x = 0; y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5 + x} = 2 \pm \sqrt{x - 1}$

Blick auf  $D_f = W_{f^{-1}}$  liefert:  $y = 2 - \sqrt{x - 1}$ , da  $y \leq 2$

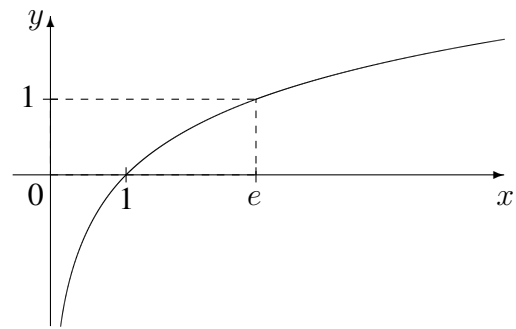
Also:  $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 1}, D_{f^{-1}} = W_f, W_{f^{-1}} = D_f$

In der Zeichnung ist der Graph an der Winkelhalbierenden des 1./3. Quadranten zu spiegeln (siehe auch Bild oben bei der Wurzelfunktion).

Kriterium: Wenn eine in einem Intervall definierte Funktion streng monoton ist, dann ist sie umkehrbar. (Siehe aber ueb128.pdf, Aufgabe 4 (c)).



$f(x) = \ln x$  („Natürliche Logarithmusfunktion“)



1. Definitionsbereich:  $D_f = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[$   
(im  $\ln$  sind nur Werte  $> 0$  erlaubt)

Wertebereich:  $W_f = \mathbb{R}$

2. Spezielle Werte:

$$f(1) = \ln 1 = 0 \text{ (Nullstelle),}$$

$$f(e) = \ln e = 1 \text{ (} e \approx 2,718 \text{ Eulersche Zahl)}$$

3. Rechenregeln ( $a, b > 0, n \in \mathbb{R}$ ):

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

Dadurch ergeben sich oft Vereinfachungen, z. B.

$$\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \ln x - \ln(x^2 + 1), \ln(e^2) = 2 \ln e = 2, \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln 1 - \ln e = -1$$

4. Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \rightarrow -\infty$  (d. h. die  $y$ -Achse ist Asymptote)

Die  $\ln$ -Funktion konvergiert schwächer als jedes Polynom, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

5. Ableitung:  $f'(x) = \frac{1}{x}$

6. Steht im  $\ln$  nicht einfach  $x$  (Beispiel:  $g(x) = \ln(1 - 2x)$ ), so muss dies berücksichtigt werden

- beim Definitionsbereich:  $g(x) = \ln(1 - 2x)$  ist definiert, wenn  $1 - 2x > 0$  ist, d. h.  $x < \frac{1}{2}$ , also  $D_g = ]-\infty; \frac{1}{2}[$
- beim Differenzieren:  $g'(x) = \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) = \frac{-2}{1-2x}$   
(„1 durch das Innere mal das Innere nachdifferenziert“)

7. Stammfunktionen:  $K(x) = \ln|x| + C$  ist Stammfunktion von  $k(x) = \frac{1}{x}$   
(siehe Formelsammlung)  $K_1(x) = \ln|v(x)| + C$  ist Stammfunktion von  $K_1(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$   
 $F(x) = x \ln x - x + C$  ist Stammfunktion von  $f(x) = \ln x$

8. Term der Umkehrfunktion:  $e^x$

Somit ist  $e^{\ln x} = x$  und  $\ln e^x = x$ .

9. Lösen von Exponentialgleichungen durch beidseitiges Logarithmieren: Beispiel aus der Stochastik:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)^n &< 0,01 & | \ln \quad (\text{und Rechenregeln!}) \\ n \ln \frac{5}{6} &< \ln 0,01 & | : \ln \frac{5}{6} \quad (< 0) \quad (!) \\ n &> \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{5}{6}} \approx 25,3 \end{aligned}$$

10. Lösen von Gleichungen vom Typ  $\ln(1 - 2x) = 3$ : Beidseitiges Anwenden der  $e$ -Funktion liefert  $e^{\ln(1-2x)} = e^3$ , also  $1 - 2x = e^3$ , somit  $x = \frac{1}{2}(1 - e^3)$

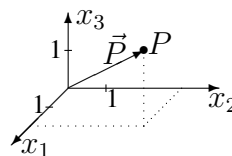
11. Die  $\ln$ -Funktion ist die Logarithmusfunktion zur Basis  $e$  ( $\ln x = \log_e x$ ).

Für die allgemeine  $\log$ -Funktion zur Basis  $a > 0$   $h_a(x) = \log_a x, x > 0$ , gilt  $h_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$  und daher  $h'_a(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$  (Basisumwandlung siehe Formelsammlung).

**Koordinaten und Vektoren**

Zum Punkt  $P(2|3|2)$  zeigt vom Nullpunkt (Ur-

prung)  $O(0|0|0)$  der **Ortsvektor**  $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

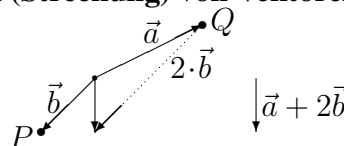


**Verbindungsvektor**  $\vec{AB}$  der Punkte  $A, B$ :  $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$  („Spitze minus Fuß“)  $A \rightarrow B$

**Addition (Aneinanderhängen) und S-Multiplikation (Streckung) von Vektoren**

Beispiel:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , dann ist  $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} =$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



**Subtraktion** von Vektoren liest man am besten als „Reise“ längs der Vektoren, z. B.  $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a}$  ist eine Reise längs  $\vec{b}$  rückwärts und anschließend längs  $\vec{a}$  vorwärts, in obiger Skizze kommt man so von  $P$  nach  $Q$ , also  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{PQ}$ .

**Mittelpunkt**  $M$  der Strecke  $\vec{AB}$ :  $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

**Länge eines Vektors:**  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

**Abstand zweier Punkte** = Länge des Verbindungsvektors

Beispiel:  $A(1|-1|4), B(3|2|-2)$ .  $d(A, B) = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-1))^2 + (-2-4)^2} = 7$ .

**Einheitsvektor:** Ein Vektor gleicher Richtung mit Länge 1 ist  $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ .

Im vorigen Beispiel ist  $\vec{AB}^0 = \frac{1}{7}\vec{AB} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ , z. B. ist dann ein Punkt  $T$  auf der Strecke  $\vec{AB}$ , der 1

Längeneinheit von  $A$  entfernt liegt, gegeben durch  $\vec{T} = \vec{OT} = \vec{OA} + \vec{AB}^0$ , sodass sich  $T(1\frac{2}{7} | -\frac{4}{7} | 3\frac{1}{7})$  ergibt.

**Skalarprodukt:**  $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

**Winkel  $\varphi$  zwischen zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :**  $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Beispiel:

Winkel zwischen  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ :  $\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 2}{\sqrt{4+1+25} \cdot \sqrt{1+4+4}} \approx -0,6086$ , also  $\varphi \approx 127,49^\circ$ .

**Aufeinander senkrecht stehende Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :**  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0$

**Vektorprodukt**

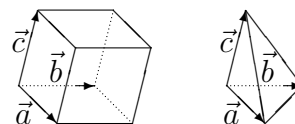
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$  ist ein Vektor, der sowohl auf  $\vec{a}$  als auch auf  $\vec{b}$  senkrecht steht.

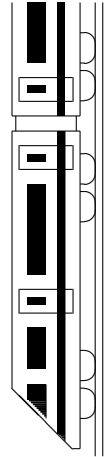
Beispiel:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - (-5) \\ 10 - 3 \\ 1 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Länge dieses Vektors ist die Fläche des von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms, entsprechend  $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$  die Dreiecksfläche.



Das Volumen des von drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  aufgespannten Spats ist gegeben durch  $V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$ , das Pyramidenvolumen entsprechend  $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$ .

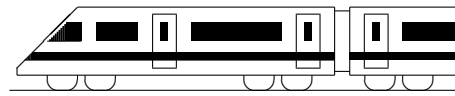




CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund12k.pdf

Blatt auf DIN A 3 vergrößern, Karteikarten ausschneiden und Rückseite an Rückseite zusammenkleben!

<p><b>Parameter bei ganzrat. Fkten</b> 121</p> <p>Wie differenziert man bei Parametern, z. B. <math>f(x) = ax^3 - 5a^2x + a^3</math>?</p>	<p><b>Diff.regeln, Stammfkt</b> 122</p> <p>Wie lauten die</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Produktregel,</li> <li>• Kettenregel?</li> </ul> <p>Beispiel: <math>h(x) = x \cdot \sin(2x)</math></p> <p>Was ist eine Stammfunktion, z. B. zu <math>f(x) = 8x^2 + 2</math>?</p>	<p><b>e-Funktion</b> 123</p> <p>Wie sieht der Graph aus (Asymptoten)? Was ist die Umkehrfkt.?</p> <p>Besondere Werte: <math>(0 ?)</math>, <math>(1 ?)</math></p> <p>Ableitung <math>f(x) = e^x</math>, <math>f'(x) = ?</math></p> <p>Wie werden Funktionen wie <math>h(x) = e^{-7x+1}</math> differenziert?</p>	<p><b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b> 124</p> <p>Wie berechnet man allgemein Erwartungswerte?</p> <p>Wie berechnet man im Urnenexp. „Ziehen ohne Zurücklegen“ <math>P(E)</math> z. B. für</p> <p>↑ Ereignis E: 1 weiße 2 schwarze 3 weiße 5 schwarze</p>	<p><b>Binomialverteilung</b> 125</p> <p>Für Binomialvert./Bernoullikette: <math>E(X) = ?</math>, <math>V(X) = ?</math>, <math>P_{n=50,p=0,85}(X = 48) = ?</math>, <math>P_{n=50,p=0,85}(X \geq 48) = ?</math></p>
<p>L121</p> <p>Parameter werden wie eine feste Zahl behandelt, z. B. <math>f'(x) = 3ax^2 - 5a^2</math>.</p>	<p>L122</p> <p>„Das erste differenzieren mal das zweite lassen plus ...“</p> <p>„Das Äußere differenziert ... mal das Innere nachdifferenziert“:</p> <p><math>f'(x) = 1 \cdot \sin(2x) + x \cdot \cos(2x) \cdot 2</math></p> <p>Stammfunktion <math>F</math>, wenn <math>F' = f</math>, z. B. <math>F(x) = 8 \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} + 2x + C</math></p>	<p>L123</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0</math></p> <p>Umkehrfkt.: <math>\ln x</math></p> <p><math>(0 1)</math>, <math>(1 e)</math>, <math>e \approx 2,718</math></p> <p><math>f'(x) = e^x</math></p> <p>„e-Fkt. reproduziert sich mal das Innere nachdifferenziert“, z. B. <math>h'(x) = -7e^{-7x+1}</math></p>	<p>L124</p> <p><math>E(X) =</math> „Summe Wert <math>x_i</math> mal W.“ <math>P(X = x_i)^4</math></p> <p><math>P(E) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3 \cdot 10}{56} \approx 0,54</math>,</p> <p>wobei <math>\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!}</math></p>	<p>L125</p> <p>Bin. vert.: <math>E(X) = np</math>, <math>V(X) = npq</math>, <math>P(X = 48) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =</math> <math>= \binom{50}{48} 0,85^{48} 0,15^2 = 0,01128</math>, <math>P_{\dots}(X \geq 48) = 1 - P_{\dots}(X \leq 47) =</math> <math>= 1 - 0,9858 = 0,0142</math> (→ Tafel/TR).</p>
<p><b>Testen von Hypothesen</b> 126</p> <p>Welche Vorgehensweise liegt bei Hypothesentests meist vor, z. B.: Die Vermutung „Trefferw. <math>p &gt; 0,85</math>“ soll auf 1 %-Niveau hochsignifikant „bewiesen“ werden bei Stichprobenlänge <math>n = 50</math></p>	<p><b>Quotientenregel</b> 127</p> <p>Wie lautet die Quotientenregel? Beispiele: <math>f_1(x) = \frac{1}{(x^2-7)^3}</math> <math>f_2(x) = \frac{e^x}{x^2+1}</math></p>	<p><b>Umkehrfunktion, Wurzelfunktion</b> 128</p> <p>Wie berechnet und zeichnet man zu einer Funktion die Umkehrfunktion?</p> <p>Wurzelfkt. <math>f(x) = \sqrt[n]{x}</math>, <math>f'(x) = ?</math></p>	<p><b>In-Funktion</b> 129</p> <p>Wie sieht der Graph aus (Asymptoten, Definitionsbereich)? Besondere Werte: <math>\ln 1</math>, <math>\ln e</math></p> <p>Ableitung <math>f(x) = \ln x</math>, <math>f'(x) = ?</math></p> <p>Wie werden Funktionen wie <math>h(x) = \ln((1-3x)^2)</math> differenziert?</p>	<p><b>Koordinatengeometrie</b> 120</p> <p>Wie berechnet man</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• den Verbindungsvektor <math>\overrightarrow{AB}</math>,</li> <li>• den Mittelpunkt <math>M</math>,</li> <li>• die Streckenlänge <math> \overline{AB} </math>,</li> <li>• Skalar- und Vektorprodukt,</li> <li>• den Winkel zwischen Vektoren?</li> </ul>
<p>L126</p> <p><math>H_0 : p \leq 0,85</math>, <math>H_1 : p &gt; 0,85</math></p> <p>Entscheidungsregel: <math>H_0</math> ablehnen, falls Trefferzahl <math>k \geq k_0</math>.</p> <p><math>k_0</math> wird so bestimmt, dass <math>\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) =</math> <math>= P_{n=50,p=0,85}(k \geq k_0) \leq 0,01</math> (Tafel/TR hier → <math>k_0 = 49</math>).</p>	<p>L127</p> <p>„N.-AZ-Z.AN“</p> <p><math>f_1'(x) = \frac{-3 \cdot 2x}{(x^2-7)^4}</math> <math>f_2'(x) = \frac{e^x - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}</math></p>	<p>L128</p> <p>Variablentausch <math>x \leftrightarrow y</math>.</p> <p>Graph: Spiegelung an Winkelhalbierender <math>y = x</math>.</p> <p><math>f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}</math>, <math>f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}</math>.</p>	<p>L129</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \rightarrow -\infty</math> <math>\ln 1 = 0</math>, <math>\ln e = 1</math></p> <p><math>D_{\ln} = ]0; \infty[</math></p> <p><math>f'(x) = \frac{1}{x}</math></p> <p>„1 durch das Innere mal das Innere nachdifferenziert“, z. B. <math>h(x) = 2 \ln(1-3x)</math>: <math>h'(x) = \frac{2 \cdot (-3)}{1-3x}</math></p>	<p>L120</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• „Spitze minus Fuß“</li> <li>• <math>\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})</math></li> <li>• <math>\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} + \dots</math></li> <li>• <math>\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3</math></li> <li>• <math>\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}</math> usw.)</li> <li>• <math>\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }</math></li> </ul>



<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Parameter bei ganzrationalen Funktionen</b>	<b>01</b>

1. Gegeben sind die Funktionenschar  $f_k$  mit  $f_k(x) = 2kx + 3$  mit dem Parameter  $k \in \mathbb{R}$  und die Parabel  $p$  mit  $p(x) = x^2 - 2x + 5$ .

Welche der Geraden ist parallel zur Tangente an  $p$  im Punkt  $Q(2|5)$ ?

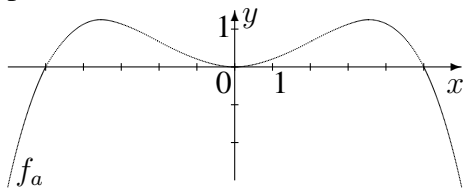
2. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{1}{a^2}x^3 - \frac{3}{a}x^2 - 9x + 5(a+1)$  mit dem negativen Parameter  $a < 0$ .

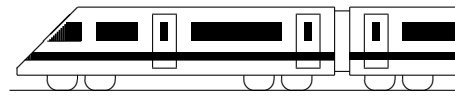
- (a) Untersuchen Sie die Lage des Maximums!  
(b) Zeigen Sie, dass die Maxima aller Scharcurven auf einer Geraden liegen, und geben Sie deren Gleichung an.

Hinweis: Man kann z. B. das Maximum für zwei spezielle Parameterwerte angeben, z. B. für  $a = -1$  und  $a = -2$  und durch diese Punkte die Gerade mit  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  legen; der Ansatz  $y = mx + t$  führt durch Einsetzen eines Punktes auf  $t$ ; Punktprobe mit dem allgemeinen Punkt bestätigt, dass alle solchen Punkte auf dieser Geraden liegen.

3. Untersuchen Sie das Beispiel  $f(x) = a^3x^4 - ax^2$  mit Parameter  $a \neq 0$  in Hinblick auf folgende Eigenschaften:

- (a) Maximaler Definitionsbereich, Grenzwerte im Unendlichen in Abhängigkeit vom Parameter, Symmetrie.  
(b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter.  
(c) Extremstellen und deren Art in Abhängigkeit vom Parameter: Identifizieren Sie die Art der Extrema mit Hilfe von  $f''$ .  
(d) Zeigen Sie, dass die Koordinaten eines der beiden Wendepunkte gegeben sind durch  $W(x|y)$  mit I  $x = \frac{1}{\sqrt{6a}}$  und II  $y = -\frac{5}{36a}$ . Berechnen Sie die Ortskurve (geometrischer Ort) der Wendepunkte: Gehen Sie zur Berechnung der Gleichung der Kurve, auf der die Wendepunkte liegen, so vor: Lösen Sie I nach  $x$  auf und setzen Sie in II ein.  
(e) Mit Hilfe von dynamischer Geometrie-Software (z. B. GeoGebra) kann herausgefunden werden kann, zu welchem Wert des Parameters der hier gegebene Graph gehört; hierzu erstellt man einen Schieberegler  $a$ , gibt  $f_a(x)$  ein und bewegt den Schieberegler so, dass charakteristische Stellen (z. B. die sichtbare Nullstelle  $x = 5$  und der prinzipielle Verlauf) mit dem von der Software angezeigten Graphen übereinstimmen. Geben Sie diesen Wert von  $a$  an.





<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Differentiationsregeln, Stammfunktion</b>	<b>02</b>

1. Differenzieren Sie:

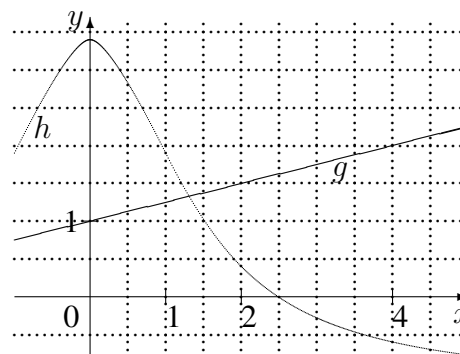
- (a)  $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$
- (b)  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$
- (c)  $f(x) = (2x^2 - 7x)^4$
- (d)  $f(x) = (2x - 1) \sin(3x)$

2. Differenzieren Sie  $f(x) = (1 - x^2)^3$  auf drei Arten:

- (a) Durch Ausmultiplizieren mit Hilfe der Formel  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .
- (b) Mit der „dreifachen“ Produktregel  $(f_1 f_2 f_3)' = f_1 f_2 f_3' + f_1 f_2' f_3 + f_1' f_2 f_3$ .
- (c) Mit der Kettenregel. Geben Sie an, welche Möglichkeit Ihnen am bequemsten erscheint.

3. Gegeben sind die Graphen der Funktionen  $g$  und  $h$ .

Bestimmen Sie graphisch für die Verkettung  $f(x) = h(g(x))$  näherungsweise den Wert von  $f'(4)$ .



4. Bestimmen Sie für  $f(x) = \frac{1}{5}x + \cos(2x)$ ,  $D_f = [0; \pi]$ , die steilste Stelle des Graphen.

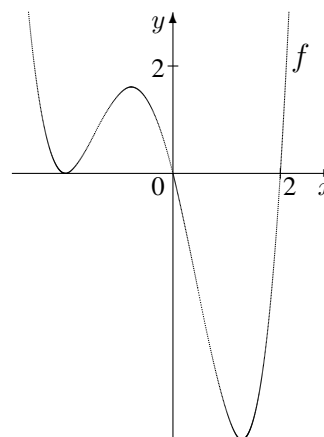
5. Ergänzen Sie die folgende Tabelle mit Stammfunktionen:

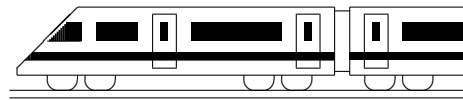
$f(x)$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^n$
$F(x)$	$\frac{1}{2}x^2 + c$				

Geben Sie dann die Stammfunktions-Terme zu  $a(x) = 7x^2 - 8x - 1$ ,  $b(x) = \sin x + x \cos(x^2)$  und  $c(x) = 12x^{12} - 12x + 12$  an.

6. Gegeben ist der nebenstehende Graph einer Funktion  $f$ . Ermitteln Sie graphisch die Form des Graphen zur Ableitungsfunktion  $f'$ .

Skizzieren Sie ferner umgekehrt die Gestalt des Graphen einer Stammfunktion  $F$ .





<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>e-Funktion</b>	<b>03</b>

1. Differenzieren Sie:

(a)  $f_1(x) = e^{5x-3}$

(b)  $f_2(x) = e^{-x}$

(c)  $f_3(x) = (x^2 - 2)e^x$

(d)  $f_4(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}}$  (Produktregel nach Umformung mit negativem Exponenten!)

(e)  $f_5(x) = e^{x \sin x}$

(f)  $f_6(x) = xe^{\sin x}$

2. Finden Sie Stammfunktionen:

(a)  $f(x) = 3e^{3x}$

(b)  $g(x) = 6e^{3x+1}$

(c)  $h(x) = 2xe^{-x^2}$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a)  $e^x = 10$

(b)  $(11x - 12)e^{13x-14} = 0$

(c)  $5xe^x + (x^2 + 4)e^x = 0$

(d)  $e^{2x} = 3e^x$

4. (Abwandlung einer Aufgabe aus dem Grundkurs-Abitur Baden-Württemberg 1992)

Kraftfahrzeuge erzeugten weltweit 1990 ca. 2,75 Milliarden Tonnen  $\text{CO}_2$ . Der  $\text{CO}_2$ -Ausstoß  $g(t)$  in Milliarden Tonnen zur Zeit  $t$  (in Jahren nach 1990) soll zunächst beschrieben werden durch  $g(t) = 2,75 \cdot a^t$ .

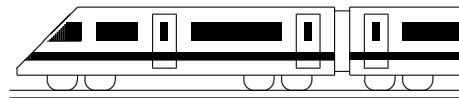
(a) Geben Sie  $a$  an, wenn der  $\text{CO}_2$ -Ausstoß jährlich um 2,1 % steigt. Wie groß ist dann der  $\text{CO}_2$ -Ausstoß im Jahr 2030?

(b) Schreiben Sie den Funktionsterm auch in der Form  $g(t) = 2,75e^{kt}$ . Berechnen Sie  $g'(40)$  und geben Sie die anschauliche Bedeutung dieser Größe an.

(c) Nun soll der  $\text{CO}_2$ -Ausstoß beschrieben werden durch  $h(t) = 4,17 - 1,42e^{-0,041t}$ . Zeigen Sie, dass sich für diesen Term die (ungefähr) gleichen „Startbedingungen“  $h(0) = g(0)$  und  $h'(0) \approx g'(0)$  ergeben. Welcher Unterschied ergibt sich bei dieser Modellierung auf lange Sicht?

5. Untersuchen Sie  $f(x) = (0,5 - x)e^{1-x}$  auf Nullstellen, Extrema und Verhalten im Unendlichen.

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und der Werte  $f(0)$  und  $f(1)$ .



<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	<b>04</b>

1. Die folgenden drei Kolmogorow-Axiome sind für Wahrscheinlichkeiten fundamental:
- (1)  $P(\Omega) = 1$ ,
  - (2)  $P(E) \geq 0$  für alle Ereignisse  $E$ ,
  - (3)  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$  für alle Ereignisse  $E_1, E_2$  mit  $E_1 \cap E_2 = \{\}$ .

Folgern Sie nur aus (1)–(3) die Rechenregel  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

2. Eine Maschine soll Papier auf eine bestimmte Länge zuschneiden. Das Schneidewerkzeug liefert nicht immer korrekt geschnittene Blätter. Beim Zuschnitt entsteht — auf ganze mm gerundet — zu 3 % die Papierlänge 295 mm, zu 18 % die Länge 296 mm, zu 45 % 297 mm, zu 22 % 298 mm, zu 7 % 299 mm und zu 5 % 300 mm. Berechnen Sie Erwartungswert und Streuung.
3. 6 Personen wählen aus 3 Kandidaten A, B, C einen Sprecher, wobei jede Person zufällig einen Kandidaten bevorzugt.

Dabei können z.B. Wahlergebnisse wie AAAABB entstehen, bei denen ein Kandidat eine absolute Mehrheit von 4 Stimmen erhält sowie ein weiterer zwei (nur ein Wahlgang nötig), wie AABBC mit Stimmgleichheit (Losentscheid im zweiten Schritt) oder solche wie AAABBC, bei denen ein Kandidat drei, einer zwei und einer eine Stimme erhält (Stichwahl zwischen A und B mit der Folge, dass je nach zufälliger Entscheidung des Kandidaten, der C wählte, sich dann eine absolute Mehrheit für A ergibt oder im dritten Schritt das Los zwischen A und B entscheiden muss).

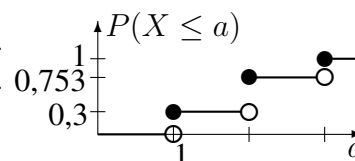
- (a) Für die Wahrscheinlichkeit eines Wahlergebnisses wie AABBC wird notiert:

$$P(E) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{3^6}.$$

Begründen Sie, wie es zu dieser Angabe kommt, und geben Sie  $\binom{6}{2}$  ohne Taschenrechner an.

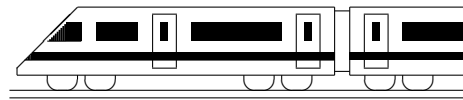
- (b) Berechnen Sie  $P$ („drei Wahlschritte“).

- (c) Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Zahl der nötigen Wahlschritte. Die kumulative Verteilungsfunktion ist durch nebenstehende Abbildung gegeben.



Berechnen Sie  $E(X)$ .

4. Beim Lotto 6 aus 49 befinden sich 49 Kugeln in der Lostrommel, aus denen 6 ohne Zurücklegen gezogen werden.
- (a) Der Spielteilnehmer hat vor der Ziehung 6 Zahlen auf dem Spielschein angekreuzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (W.), dass sich unter den 6 gezogenen Kugeln genau 4 vorher angekreuzte befinden.
  - (b) Wie viele Möglichkeiten für die Ziehung 6 aus 49 gäbe es, wenn die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, von Interesse wäre?
5. Aus 16 Kugeln, davon 4 weiße und 12 schwarze, werden 4 gezogen.
- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: Es werden (A) gleich viele von jeder Sorte, (B) Kugeln gleicher Farbe, (C) abwechselnde Farben gezogen.
  - (b) Es ist zu erwarten, dass  $\frac{1}{4}$  der gezogenen Kugeln, also 1 weiß ist. Zeigen Sie, dass dieses Ereignis am wahrscheinlichsten ist.



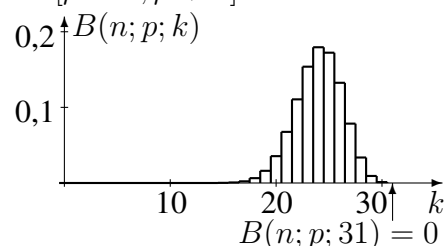
<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Binomialverteilung</b>	<b>05</b>

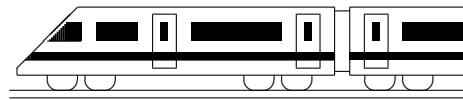
1. Erklären Sie anschaulich die Bedeutung von  $\binom{n}{k}$  in der  $B(n; p; k)$ -Formel.
2. Eine Maschine soll Papier auf eine bestimmte Länge zuschneiden. Das Schneidewerkzeug liefert nur zu 80 % korrekt geschnittene Blätter. Das Experiment soll als Bernoulli-Kette betrachtet werden.
  - (a) Diskutieren Sie die hierfür nötige Unabhängigkeitsannahme.
  - (b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit (W.) an, dass sich unter 100 Blättern
    - höchstens 90
    - mindestens 90
    - mindestens 70 und höchstens 90
    - mindestens 98einwandfreie befinden.
  - (c) Das Schneidewerkzeug wird ausgetauscht, wenn unter 50 Blättern weniger als  $k_0 = 45$  einwandfreie sich befinden.  
Ermitteln Sie, wie groß die W. für einen Austausch ist.  
Ermitteln Sie dann ferner, wie die Zahl  $k_0$  geändert werden muss, damit die Austausch-W. mindestens 99 % beträgt.

3. In einer Klasse mit 25 Jugendlichen (davon 11 Mädchen) geben je 4 Buben und Mädchen an, für das Studium bereits Geld zu sparen.
  - (a) Es wird eine Person zufällig ausgewählt.  
Berechnen Sie, mit welcher W. es sich um ein Mädchen handelt, wenn die ausgewählte Person zur Gruppe der „Sparer“ gehört.
  - (b) Nun werden nacheinander 4 Schüler zufällig ausgewählt. Zu betrachten ist das Ereignis „Es wird genau ein Sparer ausgewählt“.  
Zeigen Sie, dass sich die W. für Ziehen ohne bzw. mit Zurücklegen um mehr als 2 Prozentpunkte unterscheiden. Argumentieren Sie, warum der Unterschied bei Ziehen aus einer großen Personenzahl geringer ist.

Im Folgenden soll im Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ gerechnet werden.

- (c) Berechnen Sie die W., dass
    - frühestens die vierte gezogene Person weiblich ist,
    - spätestens die vierte gezogene Person weiblich ist,
    - die vierte gezogene Person die zweite weibliche ist.
  - (d) Berechnen Sie, wie oft das Experiment „Auswahl einer Person“ durchgeführt werden muss, um mit mehr als 99 % W. mindestens eine Sparerin zu ziehen.
  - (e) Nun wird aus 200 Personen mit gleichen prozentualen Anteilen wie in der Schulklasse gezogen.  
Ermitteln Sie, wie groß die zu erwartende Zahl  $\mu$  der männlichen Nichtsparer ist. Bestimmen Sie, mit welcher W. man genau diese Anzahl erhält. Bestimmen Sie, wie groß die Streuung  $\sigma$  für diese Anzahl ist und die W., dass sich die Zahl der gezogenen männlichen Nichtsparer im Intervall  $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$  befindet.
4. Das hier gegebene Histogramm zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einer binomialverteilten Zufallsgröße. Dabei ist für diese  $B(n; p)$ -Verteilung der Wert von  $n$  ein Vielfaches von 10, der von  $p$  ein Vielfaches von 0,1.
    - (a) Ermitteln Sie  $n$  und  $p$ .
    - (b) Erklären Sie, wie man nun den Wert von  $B(30; 0,2; 12)$  ablesen kann.





<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Testen von Hypothesen</b>	<b>06</b>

1. Eine politische Partei möchte bei der nächsten Wahl die 5 %-Hürde überspringen. Wie sollte (auf 1 %-Signifikanzniveau) aufgrund einer Umfrage unter 200 Wahlberechtigten entschieden werden, ob noch Wahlkampf hierfür betrieben werden soll?

2. In einem Kinderspiel wird aus den Ziffern „123456“ jeweils die gewürfelte Ziffer ausgestrichen. Nikola vermutet, da nach 1000 solchen Spielen nur bei wenigen bereits nach dem sechsten Wurf alle Ziffern gestrichen waren, der verwendete Würfel biete nur eine geringe Chance für ein Sechs-Wurf-Spiel. Erstellen Sie einen entsprechenden Test auf 5 %-Niveau für Nikolas Vermutung (=  $H_1/H_0$ : Laplace-Würfel).

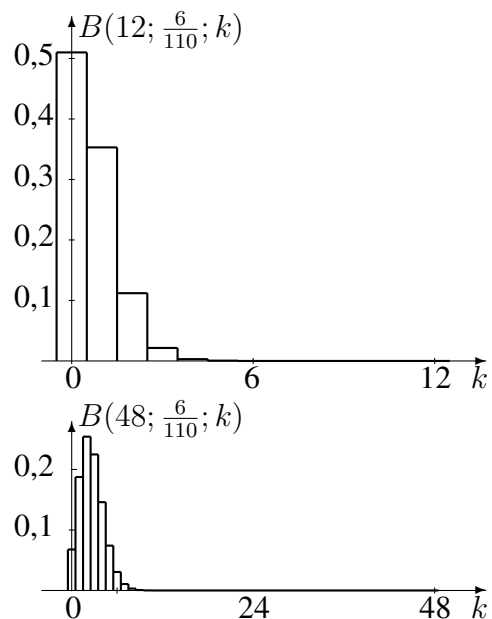
$k$	$\sum_{i=0}^k B(1000; \frac{120}{7776}; i)$
...	...
7	0,0135
8	0,0289
9	0,0557
...	...
21	0,9344
22	0,9588
...	...

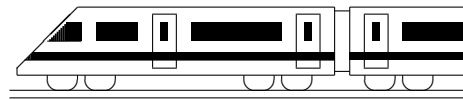
3. Ein Hersteller, der in eine große Ladung Natursteinplatten unterschiedliche Anteile 1. Wahl und 2. Wahl mischt, möchte die Verärgerung anspruchsvoller Kunden, die mehr als 70 % 1. Wahl erwarten, vermeiden und führt mit einer Stichprobe von 50 Stück einen entsprechenden Hypothesentest durch.

- (a) Begründen Sie Ihre Wahl von Nullhypothese und Alternative.
- (b) Stellen Sie die Entscheidungsregel (ER) für einen Test auf Niveau 5 % auf.
- (c) Wie ist bei dieser ER zu entscheiden, wenn 20 % der Stichprobe 2. Wahl waren?
- (d) Wie groß ist bei dieser ER das Risiko des Herstellers, eine Lieferung irrtümlich nicht für gut zu halten, obwohl tatsächlich 85 % der Steine 1. Wahl sind?

4. In einer Gewinnshow behauptet ein Kandidat, anhand des unterschiedlichen Abnutzungsgrads der Spielkarten aus einem Rommé-Blatt (110 Karten, davon 6 Joker) mit 50 % Treffsicherheit blind eine Karte auszuwählen, bei der es sich um einen Joker handelt. Er hat mit einem jeweils neuen Kartenstapel 12 Versuche, von denen er mindestens 2mal ein Joker herausziehen muss.

- (a) Berechnen Sie gemäß dem Grundsatz „in dubio pro reo“ mit Hilfe des hier abgebildeten Histogramms der  $B(n; p)$ -Verteilung bzw. mit entsprechenden Formeln  $\alpha$ - und  $\beta$ -Fehler.
- (b) Wie müsste die Entscheidungsregel für einen Test auf 10 %-Niveau für  $n = 48$  Versuche gewählt werden?
- (c) Warum ist im Histogramm zu  $n = 48$  der Berg schmaler als im ersten?
- (d) Welche Möglichkeit ergibt sich daraus, gleichzeitig  $\alpha$ - und  $\beta$ -Fehler zu verkleinern?





<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Quotientenregel</b>	<b>07</b>

1. Differenzieren Sie:

(a)  $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$

(b)  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(c)  $f(x) = \frac{4}{3x - 2}$

(d)  $f(x) = (7x - 1)^4 \cdot x^{-2}$

(e)  $f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$

(f)  $f(x) = \frac{2x + 1}{(2x - 1)^2}$

(g)  $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$

(h)  $f(x) = \frac{x^2 - 12x + 36}{x}$

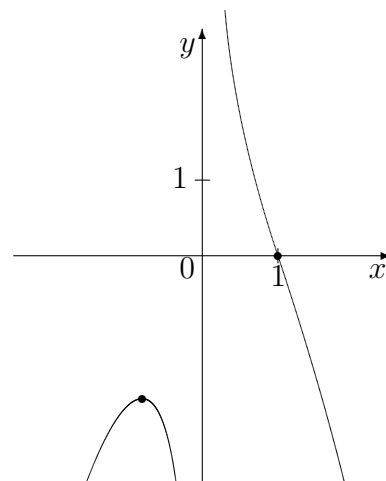
Beschreiben Sie, wie sich die hier sichtbare doppelte Zähler-Nullstelle in der Ableitungsfunktion bemerkbar macht.

2. Betrachten Sie für

$$f(x) = \frac{1}{x} - x^2$$

Definitionsbereich, Verhalten in der Nähe der Definitionslücke, Nullstellen, Extrema und Monotonie und bestätigen Sie damit die Gestalt des nebenstehend dargestellten Graphen.

Wie verhält sich dieser für  $x \rightarrow \pm\infty$ ?

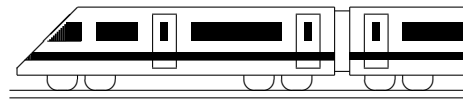


3. In ueb123.pdf, Aufgabe 1(d) wurde  $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x}}$  mit der Produktregel und der Umformung  $f(x) = (e^{2x} - 1)e^{-3x}$  differenziert.

Alternativ kann dieses Produkt ausmultipliziert werden oder es kann für die Bruchschreibweise die Quotientenregel verwendet werden.

Zeigen Sie, dass sich in beiden Fällen ebenfalls  $f'(x) = \frac{-e^{2x} + 3}{e^{3x}}$  ergibt.

4. Fertigen Sie für  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  eine vollständige Funktionsuntersuchung (Definitionsbereich, Asymptoten, Symmetrie, Nullstellen, Extrema und Monotonie, Krümmung und Wendepunkte, Skizze, Wertebereich).



<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Umkehrfunktion, Wurzelfunktion</b>	<b>08</b>

1. Gegeben ist die Funktion mit  $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ .

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an, zeichnen Sie den Funktionsgraphen und begründen Sie, dass sich tatsächlich genau ein Halbkreis ergibt, also eine Figur, deren Punkte alle den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben.

2. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion zu  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ,  $D_f = ] - \infty; 2]$  (siehe grund128.pdf), nämlich  $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$ ,  $D_{f^{-1}} = [1; \infty[$ ,

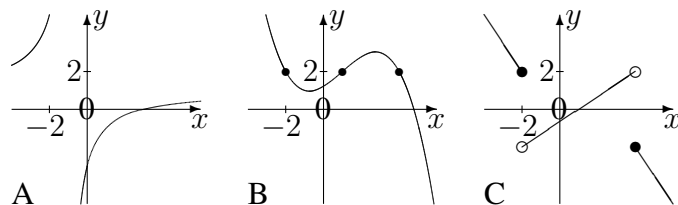
- (a) indem Sie beschreiben, wie  $f^{-1}$  durch Verschiebungen und Streckungen aus der gewöhnlichen Wurzelfunktion mit  $y = \sqrt{x}$  hervorgeht,  
(b) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten.  
(c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Steigung  $f'(a)$  in dem auf dem Graphen von  $f$  liegenden Punkt  $(a|b)$  und der Steigung  $(f^{-1})'(b)$  im entsprechenden Punkt der Umkehrfunktion.

3. Berechnen Sie den Term der Umkehrfunktion:  $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ .

4. Untersuchung auf Umkehrbarkeit:

- (a) Beim Funktionsterm  $f(x) = x^3 + 5x + 7$  ist zwar die explizite Angabe des Terms der Umkehrfunktion (zumindest mit Schulmethoden) nicht möglich; trotzdem kann gesagt werden, dass die dadurch gegebene Funktion umkehrbar ist, und zwar mit Hilfe der Steigung. Führen Sie diese Betrachtung durch!

- (b) Gegeben sind die nebenstehenden Funktionsgraphen. Erklären Sie, bei welchen der Graphen Umkehrbarkeit vorliegt.



- (c) Erklären Sie, dass beim Kriterium „wenn streng monoton, dann umkehrbar“ der Kehrsatz („wenn umkehrbar, dann streng monoton“) nicht gilt.

5. Differenzieren Sie und betrachten Sie den Definitionsbereich von  $f(x)$  und  $f'(x)$ :

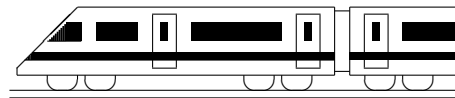
- (a)  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$   
(b)  $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$

6. Differenzieren Sie  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ , fertigen Sie eine Skizze und zeichnen Sie darin die Tangente im Punkt  $(0|1)$  (mit Steigung  $f'(0)$ ) ein.

In der Nähe dieses Punktes stimmen Funktion und Tangente etwa überein. Welche Näherung ergibt sich damit?

Diese Näherung wird in der Relativitätstheorie benötigt. Dabei ist  $x = (\frac{v}{c})^2$ , und man betrachtet  $E = mc^2$  mit der relativistischen Masse  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ .

Was liefert dann die Anwendung der obigen Näherung?



## 12. Klasse Übungsaufgaben

**12**

### In-Funktion

**09**

1. Differenzieren Sie und bestimmen Sie den Definitionsbereich:

(a)  $f_1(x) = \ln(4x + 10)$

(d)  $f_4(x) = (x - e) \ln x$

(b)  $f_2(x) = \ln(-x)$

(e)  $f_5(x) = \ln\left(\frac{2x+5}{x-1}\right)$

(c)  $f_3(x) = 3 \ln(x^2)$

(f)  $f_6(x) = e^x \cdot \ln(7 - x)$

2. Bestätigen Sie durch Differenzieren, dass  $F(x) = x \ln x - x + C$  Stammfunktion von  $f(x) = \ln x$  ist, und finden Sie durch Anwenden entsprechender Rechenregeln Stammfunktion und Ableitung von  $h(x) = \log_{10} x$ .

3. Finden Sie Stammfunktionen:

(a)  $f(x) = 2 - \frac{7}{x}$

(b)  $g(x) = \frac{x-11}{x^2}$

4. Lösen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen:

(a)  $\ln x = -2$

(b)  $\ln(x^2 - 1) = 10$

(c)  $1 - 0,99^x > 0,9$

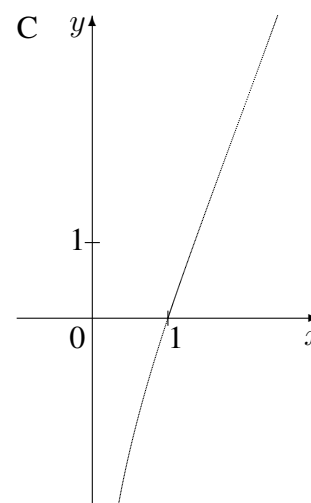
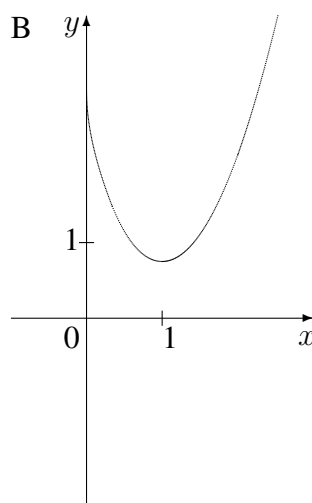
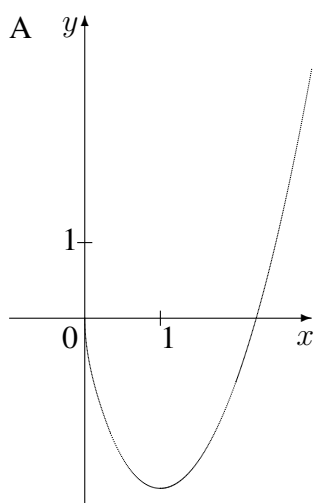
5. Begründen Sie mit Hilfe der Ableitung, dass die Funktion  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ,  $D_f = ]1; \infty[$ , umkehrbar ist.

Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion.

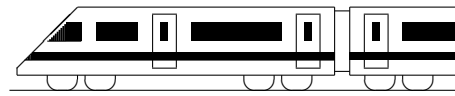
6. Untersuchen Sie  $f(x) = (x+2) \ln x$  auf Definitionsbereich, Nullstellen und Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt (2|?).

Begründen Sie, welcher der folgenden Graphen zur Funktion  $f$  gehört. Welche könnten Stammfunktionen von  $f$  darstellen?

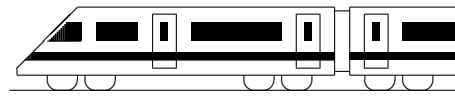


Zeigen Sie, dass durch  $F(x) = (0,5x^2 + 2x) \ln x - 0,25x^2 - 2x$  eine Stammfunktion von  $f$  gegeben ist, und berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x)$ .



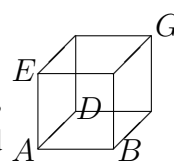
<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Koordinatengeometrie</b>	<b>10</b>

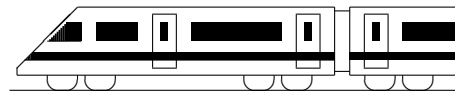
- Gegeben ist die Pyramide  $ABCS$  durch die Punkte  $A(5|0|0)$ ,  $B(3|4|1)$ ,  $C(1,5|-2|2,5)$  und  $S(3|2|5)$ , die von den Vektoren  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  und  $\vec{w} = \overrightarrow{AS}$  aufgespannt wird.  $M$  sei der Mittelpunkt von  $[AB]$ , der Punkt  $T$  teile die Strecke  $[CB]$  im Verhältnis  $2 : 1$ , d. h. es ist  $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ .
  - Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $M$  und  $T$ .
  - Stellen Sie die Situation in einem Koordinatensystem zeichnerisch dar.
  - Berechnen Sie das Volumen der Pyramide  $ABCS$  und der Pyramide  $MBTS$ .
  - Drücken Sie den Vektor  $\overrightarrow{TS}$  durch  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  aus (d. h. in Form einer sog. Linearkombination  $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w}$ ).  
Tipp:  $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BS} + \dots$
- Gegeben ist das Dreieck  $ABD$  mit  $A(-1|-1|1)$ ,  $B(2|-2|1)$  und  $D(2,5|-0,5|1)$ .
  - Berechnen Sie die Längen der drei Seiten und die drei Innenwinkel.
  - Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes  $C$ , so dass  $ABCD$  ein Parallelogramm ist.
  - Berechnen Sie das Vektorprodukt  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ . Geben Sie die Bedeutung dieses Vektorprodukts an. Beschreiben Sie, warum die besondere Lage dieses Vektors bereits aus den gegebenen Koordinaten ersichtlich war.
  - Das Dreieck  $ABD$  wird nun in die  $x_1x_2$ -Grundebene projiziert und somit jetzt das Dreieck  $A'B'D'$  mit  $A'(-1|-1)$ ,  $B'(2|-2)$ ,  $D'(2,5|-0,5)$  betrachtet.  
Geben Sie an, welche besondere Rolle für dieses Dreieck der Kreis um  $M'(0,75|-0,75)$  mit Radius  $\frac{5}{4}\sqrt{2}$  spielt.
- Berechnen Sie den Parameter  $t$  des Punktes  $C_t(t|t|0)$ , also einen Punkt auf der Winkelhalbierenden zwischen  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse, sodass das Dreieck  $ABC_t$  mit  $A(2|4|1)$ ,  $B(-3|-3|-3)$  bei  $A$  rechtwinklig ist.
- Berechnen Sie den Winkel  $\varphi$  zwischen den Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Kompakt-Überblick zum Grundwissen</b>	<b>K</b>

1. Parameter bei ganzrationalen Funktionen (siehe auch grund121.pdf)  
Bestimmen Sie zu  $f_a(x) = 3x^4 - 8ax^3 + 16a^4 + a + 3$  (mit dem reellen Parameter  $a \neq 0$ ) Lage und Art des Extremums in Abhängigkeit von  $a$ .  
Zeigen Sie, dass die Extrema alle auf einer Geraden liegen.
2. Differentiationsregeln, Stammfunktion (siehe auch grund122.pdf)  
Differenzieren Sie  $f_1(x) = (2x - 6) \sin x$  und  $f_2(x) = \cos(\sqrt{x} - \frac{6}{x})$ .
3. e-Funktion (siehe auch grund123.pdf)  
Untersuchen Sie für  $f(x) = 2e^{0,5x} - x$ : Verhalten im Unendlichen, Extrema (Lage und Art), Wertebereich, Skizze. Geben Sie an, ob es Nullstellen gibt.
4. Wahrscheinlichkeitsverteilungen (siehe auch grund124.pdf)  
An einer Schule gibt es 12 Mathematik-Lehrer, davon 4 „gefürchtete“. Berechnen Sie (bei Zufalls- und Unabhängigkeitsannahme) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A_i$ , in drei aufeinander folgenden Schuljahren  $i = 0/1/2/3$ -mal einen gefürchteten Lehrer zu erhalten, wenn jedes Schuljahr mit einem anderen Lehrer besetzt wird.  
Berechnen Sie Erwartungswert und Streuung für die Zahl der in drei Jahren erhaltenen solchen Lehrkräfte.
5. Binomialverteilung (siehe auch grund125.pdf)  
An einer Schule gibt es 12 Mathematik-Lehrer, davon 4 „gefürchtete“. Berechnen Sie (bei Zufalls- und Unabhängigkeitsannahme) die Wahrscheinlichkeit, in drei aufeinander folgenden Schuljahren mindestens zweimal einen gefürchteten Lehrer zu erhalten, wenn jedesmal „neu gewürfelt“ wird.  
Geben Sie Erwartungswert und Streuung für die Zahl der in drei Jahren erhaltenen solchen Lehrkräfte an.
6. Testen von Hypothesen (siehe auch grund126.pdf)  
Nach einer großen Untersuchung im Jahr 1973 glaubten ca. 25 % der Deutschen, dass ein vierblättriges Kleeblatt Glück bringt. In einer neuen Untersuchung werden 100 Personen befragt. Wie viele müssten dabei nun auf den Glücksbringer vertrauen, damit die Schlagzeile „Deutsche immer abergläubischer“ auf 5 %-Niveau gerechtfertigt ist?
7. Quotientenregel (siehe auch grund127.pdf)  
Differenzieren Sie  $f(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$ .
8. Umkehrfunktion, Wurzelfunktion (siehe auch grund128.pdf)  
Bestimmen Sie für  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^4 - 3$ ,  $D_f = ]-\infty; 1]$  Term und Ableitung der Umkehrfunktion.
9. In-Funktion (siehe auch grund129.pdf)  
Bestimmen Sie  $D_f$ , Nullstellen und  $f'(x)$  für  $f(x) = \ln(-4 - 2x)$ .
10. Koordinatengeometrie (siehe auch grund120.pdf)  
Zeigen Sie, dass durch  $A(2| - 3|0)$ ,  $B(22|9|9)$ ,  $D(17| - 19| - 12)$ ,  $E(2|12| - 20)$  die Ecken eines Würfels  $ABCDEFGH$  gegeben sind, indem Sie zeigen, dass  $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = |\overline{AE}|$ , und dass  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$  und  $\overline{AE}$  aufeinander senkrecht stehen.  
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $G$ . Welche Bedeutung hat  $\overline{AB} \times \overline{AD}$ ?  
Berechnen Sie den Winkel  $\varphi$  zwischen  $\overline{AB}$  und  $\overline{AG}$ .



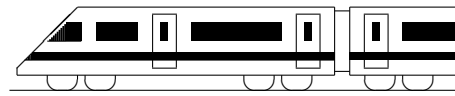


<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Parameter bei ganzrationalen Funktionen</b>	<b>01</b>

1.  $p'(x) = 2x - 2$ . Steigung der Tangente in  $Q$ :  $m = p'(2) = 2$ .  
 Steigung der Geraden:  $f'_k(x) = 2k$ , diese muss für Parallelität gleich 2 sein:  
 $2k = 2$ , also  $k = 1$ .
2. (a)  $f'_a(x) = \frac{1}{a^2} \cdot 3x^2 - \frac{3}{a} \cdot 2x - 9 = \frac{3}{a^2}x^2 - \frac{6}{a}x - 9$ .  $f'_a(x) = 0$  liefert:  

$$x_{1/2} = \frac{\frac{6}{a} \pm \sqrt{\frac{36}{a^2} - 4 \cdot \frac{3}{a^2} \cdot (-9)}}{2 \cdot \frac{3}{a^2}} = \left(\frac{6}{a} \pm \frac{12}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{6}, \text{ also } x_1 = 3a, x_2 = -a.$$
  

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad | \quad f' < 0 \quad | \quad f' > 0 \\ \text{steigt} \quad 3a \quad \text{fällt} \quad -a \quad \text{steigt} \end{array}$$
Für die Vorzeichenbereiche beachte man, dass  $3a$  „links“ von  $-a$  liegt, da  $a$  negativ ist, und dass die durch die Ableitung  $f'$  gegebene Parabel (wegen  $\frac{3}{a^2} > 0$ ) nach oben geöffnet ist, also die Vorzeichenabfolge „+ - +“ hat.  
 Also Maximalstelle  $x = 3a$  mit  $y$ -Wert  $f_a(3a) = \frac{1}{a^2} \cdot (3a)^3 - \frac{3}{a} \cdot (3a)^2 - 9 \cdot 3a + 5(a+1) = 27a - 27a - 27a + 5a + 5 = -24a + 5$ .
- (b) Maximum für  $a = -1$ :  $(-3|29)$ ; für  $a = -2$ :  $(-6|53)$ . Geradensteigung  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{53-29}{-6-(-3)} = \frac{24}{-3} = -8$ ; Einsetzen von  $(-1|29)$  in den Ansatz  $y = -8x + t$  führt auf  $t = 5$ , also  $y = -8x + 5$ . Punktprobe mit  $(3a|-24a+5)$  bestätigt, dass alle solchen Punkte auf dieser Geraden liegen.  
 Oder man löst die Gleichung für den  $x$ -Wert des Maximums  $x = 3a$  nach  $a$  auf (also  $a = \frac{x}{3}$ ) und setzt in die Gleichung für den  $y$ -Wert  $y = -24a + 5$  ein:  $y = -24 \cdot \frac{x}{3} + 5 = -8x + 5$ . Die Maxima liegen also alle auf der Geraden  $y = -8x + 5$ .
3. (a) Maximaler Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a^3x^4 - ax^2) \rightarrow +\infty$ , falls  $a > 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a^3x^4 - ax^2) \rightarrow -\infty$ , falls  $a < 0$ , da der Exponent von  $x^4$  gerade ist und der Koeffizient  $a^3$  je nach Wert des Parameters positiv oder negativ.  
 Wegen lauter geraden Exponenten achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.
- (b) Schnitt mit  $y$ -Achse:  $f(0) = 0$ , also  $Y(0|9)$ .  
 Nullstellen:  $f(x) = a^3x^4 - ax^2 = a(a^2x^2 - 1) = a(ax+1)(ax-1) = 0$ ,  
 $x_{1/2} = 0$  (doppelt),  $x_3 = -\frac{1}{a}$ ,  $x_4 = \frac{1}{a}$  (jeweils einfach), also Schnittpunkte mit  $x$ -Achse  $N_{1/2}(0|0)$ ,  $N_{3/4}(\pm\frac{1}{a}|0)$ .
- (c)  $f'(x) = 0$  liefert Stellen mit waagrechter Tangente:  $f'(x) = 4a^3x^3 - 2ax = 0$ ;  
 $2ax(2a^2x^2 - 1) = 0$  liefert  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$ .  
 $f''(x) = 12a^3x^2 - 2a$ , also  $f''(0) = -2a$ . Falls  $a < 0$ :  $f''(0) > 0$ , also bei  $x = 0$  linksgekrümmt, also dort Minimum. Falls  $a > 0$ :  $f''(0) < 0$ , also bei  $x = 0$  rechtsgekrümmt, also dort Maximum.  
 Entsprechend  $f''(\pm\frac{1}{\sqrt{2a}}) = 4a$ : Dort Minimum für  $a > 0$ , Maximum für  $a < 0$ .
- (d)  $f''(x) = 0$  liefert zunächst Stellen von Flachpunkten:  $f''(x) = 12a^3x^2 - 2a = 0$ ;  
 $2a(6a^2x^2 - 1) = 0$  liefert  $x_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6a}}$ ; jeweils einfache Lösungen mit Vorzeichenwechsel, also tatsächlich Wendepunkte.  
 $y = f(\pm\frac{1}{\sqrt{6a}}) = a^3(\pm\frac{1}{\sqrt{6a}})^4 - a(\pm\frac{1}{\sqrt{6a}})^2 = a^3 \cdot \frac{1}{36a^4} - a \cdot \frac{1}{6a^2} = \frac{1}{36a} - \frac{1}{6a} = -\frac{5}{36a}$
- (e)  $x = \frac{1}{\sqrt{6a}}$  nach  $a$  auflösen:  $a = \frac{1}{\sqrt{6x}}$ . Einsetzen in  $y = -\frac{5}{36a}$ :  $y = -\frac{5}{36 \cdot \frac{1}{\sqrt{6x}}}$ , also  
 Gleichung der Ortskurve  $y = -\frac{5\sqrt{6}}{36}x$ .
- (f)  $a = -0,2$ : Verlauf von links unten nach rechts unten und Nullstelle  $x = -\frac{1}{a} = 5$ .



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Differentiationsregeln, Stammfunktion</b>	<b>02</b>

1. (a)  $f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$   
 (b)  $f(x) = \sin(\frac{1}{2\pi}x)$ , also  $f'(x) = \cos(\frac{1}{2\pi}x) \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cos(\frac{x}{2\pi})$   
 (c)  $f'(x) = 4(2x^2 - 7x)^3 \cdot (4x - 7)$  (Klammern setzen!)  
 (d)  $f'(x) = (2x - 1) \cdot \cos(3x) \cdot 3 + 2 \cdot \sin(3x)$
2. (a)  $f(x) = (1 - x^2)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2x^2 + 3 \cdot 1 \cdot (x^2)^2 - (x^2)^3 = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$ ,  
 $f'(x) = -6x + 12x^3 - 6x^5$ .  
 (b)  $f(x) = (1 - x^2)^3 = (1 - x^2)(1 - x^2)(1 - x^2)$ ,  
 $f'(x) = (1 - x^2)(1 - x^2)(-2x) + (1 - x^2)(-2x)(1 - x^2) + (-2x)(1 - x^2)(1 - x^2)$   
 $= 3(-2x)(1 - x^2)^2 = (-6x)(1 - 2x^2 + x^4) = -6x + 12x^3 - 6x^5$ .  
 (c) Am bequemsten mit letztem Schritt wie in (b):  
 $f'(x) = 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = (-6x)(1 - x^2)^2 = \dots = -6x^2 + 12x^3 - 6x^5$ .
3. Kettenregel:  $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ , also  $f'(4) = h'(g(4)) \cdot g'(4)$ .

Für  $g'(4)$  liest man am Steigungsdreieck („4 nach rechts, 1 nach oben) die Steigung von  $g$  an der Stelle  $x = 4$  ab:  $g'(4) = \frac{1}{4}$ .

Für  $h'(g(4))$  benötigt man zunächst  $g(4)$ , man liest den Funktionswert  $g(4) = 2$  ab; zu bestimmen ist also  $h'(2)$ , also die Steigung von  $h$  bei  $x = 2$ ; legt man eine Tangente an den Graphen von  $h$  bei  $x = 2$ , so hat diese ungefähr die Steigung  $-1$  („1 nach rechts, 1 nach unten“); also  $h'(g(4)) = h'(2) \approx -1$ . Somit  $f'(4) \approx (-1) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ .

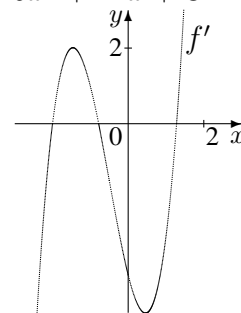
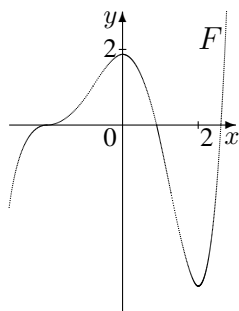
4. Die Steigung von  $f$  ist gegeben durch  $f'(x) = 0,2 - \sin(2x) \cdot 2$ ;  $f'$  ist am größten, wenn  $\sin$  am kleinsten ist, also wenn  $\sin(2x) = -1$ , d. h.  $2x = \frac{3\pi}{2}$ , d. h.  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

5. 

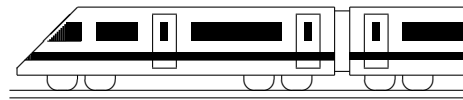
$f(x)$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^n$
$F(x)$	$x$	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

 Stammfunktionen zu  $a(x) = 7x^2 - 8x - 1$ :  
 $A(x) = 7 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C$ , also z. B.  
 $A(x) = \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x$ .  
 Zu  $b$ :  $B(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$   
 Zu  $c$ :  $C(x) = \frac{12}{13}x^{13} - 6x^2 + 12x + C$   
 (jeweils plus additive Konstante  $+C$ )

6. Zur Ermittlung der Ableitung legt man an verschiedenen Punkten des Graphen eine Tangente und bestimmt mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dessen Steigung. Die so gewonnenen Werte werden in ein Koordinatensystem eingetragen. So ist z. B. bei  $x = -2$  die Steigung 0 ( $\rightarrow$  Punkt  $(-2|0)$ ), ebenso bei  $x \approx -0,8$ ; bei  $x = 0$  ist die Steigung etwa  $-4$  ( $\rightarrow$  Punkt  $(0|-4)$ ).



Eine Stammfunktion von  $f$ , also eine Funktion  $F$  mit  $F' = f$ , muss für  $x \in ]-\infty; -2[$  (da der Graph von  $f$  dort oberhalb der  $x$ -Achse verläuft) die Eigenschaft  $F'(x) > 0$  haben, also zunächst steigend verlaufen. Bei  $x = -2$  ist  $F'(-2) = f(-2) = 0$ , also die Steigung dort 0; entsprechend erhält man den weiteren Verlauf von  $F$ . Neben der hier gezeichneten Stammfunktion sind ebenso nach oben oder unten verschobene Graphen als Lösung möglich.



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>e-Funktion</b>	<b>03</b>

1.

- (a)  $f'_1(x) = 5e^{5x-3}$  (Kettenregel)
- (b)  $f'_2(x) = -e^{-x}$  (Kettenregel)
- (c)  $f'_3(x) = (x^2 - 2)e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x - 2)e^x$  (Produktregel)
- (d)  $f_4(x) = (e^{2x} - 1)e^{-3x}$   
 $f'_4(x) = (Produktregel)$   
 $2e^{2x}e^{-3x} + (e^{2x} - 1)(-3)e^{-3x} = \frac{-e^{2x} + 3}{e^{3x}}$
- (e)  $f'_5(x) = e^{x \sin x} \cdot (\sin x + x \cos x)$
- (f)  $f'_6(x) = 1 \cdot e^{\sin x} + x e^{\sin x} \cdot \cos x = (1 + x \cos x)e^{\sin x}$

((e) und (f) mit Produkt- und Kettenregel)

2.

- (a)  $F(x) = e^{3x} + C$  (Probe durch Differenzieren bestätigt)
- (b)  $G(x) = 2e^{3x+1} + C$  (die Richtigkeit des Ansatzes)
- (c)  $H(x) = -e^{-x^2} + C$  (jeweiligen Ansatzes)

3.

- (a) Beidseitiges Logarithmieren liefert:  
 $x = \ln 10 \approx 2,3$
- (b) Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also  $11x - 12 = 0$  oder  $e^{13x-14} = 0$ ; da die e-Funktion nie 0 wird, bleibt nur  $x = \frac{12}{11}$ .
- (c)  $e^x$  ausklammern:  $(5x + x^2 + 4)e^x = 0$ .  
 Wieder kann  $e^x$  nicht 0 werden, also bleibt  $x^2 + 5x + 4 = 0$ ,  $x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ , also  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -4$ .
- (d) Wir schreiben  $e^{2x} = (e^x)^2$ , bringen alles auf eine Seite und klammern  $e^x$  aus:  $(e^x)^2 - 3e^x = 0$ ;  $e^x(e^x - 3) = 0$ .  
 Wieder  $e^x$  nicht 0, also  $e^x - 3 = 0$ ,  $e^x = 3$ ,  $x = \ln 3 \approx 1,1$ .

4.

- (a) Zunahme um 2,1 % heißt Mult. mit  $a = 1,021$ , also  $g(t) = 2,75 \cdot 1,021^t$ .  
 40 Jahre nach 1990 ergibt sich  $g(40) = 2,75 \cdot 1,021^{40} \approx 6,31$ .

(Fortsetzung 4.)

- (b)  $g(t) = 2,75 \cdot 1,021^t = 2,75 \cdot e^{\ln(1,021^t)} = 2,75e^{t \cdot \ln 1,021} = e^{kt}$   
 mit  $k = \ln 1,021 \approx 0,021$ .  
 $g'(t) = 2,75 \cdot \ln 1,021 \cdot e^{\ln 1,021 t}$ , also  
 $g'(40) = \dots \cdot e^{\ln 1,021 \cdot 40} \approx 0,13$ .  
 $g'(40)$  beschreibt die Änderungsrate im Jahr 2030, d.h. um wie viele Milliarden Tonnen der  $CO_2$ -Ausstoß im Jahr 2030 pro Jahr zunimmt.

- (c)  $h(0) = 2,75 = g(0)$ .

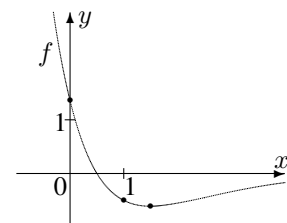
$g'(0) = 2,75 \cdot \ln 1,021 \cdot 1 \approx 0,057$ ,  
 $h'(t) = -1,42 \cdot (-0,041)e^{-0,04t}$ , also  
 $h'(0) = -1,42 \cdot (-0,041) \cdot 1 \approx g'(0)$ .

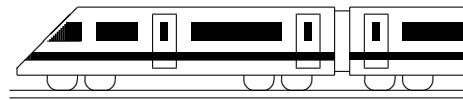
Die Werte von  $g'(t)$  werden mit zunehmendem  $t$  immer größer, d. h. die Kurve  $g$  wird immer steiler; dagegen werden die (positiven) Werte von  $h'(t)$  immer kleiner, d. h. die Kurve  $h$  steigt zwar, wird aber immer flacher;  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow \infty$ , aber  $h$  nähert sich einem Grenzwert:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 4,17$ .

5.

Nullstellen:  $f(x) = (0,5 - x)e^{1-x} = 0$ ;  
 e-Fkt. nicht 0, also  $0,5 - x = 0$ ;  $x = 0,5$ .  
 Extrema: Produktregel:  $f'(x) = (-1)e^{1-x} + (0,5 - x)e^{1-x} \cdot (-1) = (-1 - 0,5 + x)e^{1-x}$ ;  
 $f'(x) = 0$ ;  $x = 1,5$ .  
 $\frac{f'}{f} < 0$  |  $\frac{f'}{f} > 0$   
 fällt | 1,5 steigt  
 Also Min  $(1,5 | -e^{-0,5}) \approx (1,5 | -0,61)$ .  
 Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(0,5 - x)}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(0,5 - x)}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow 0} = 0$  (denn e-Fkt. konvergiert stärker); also  $y = 0$  ( $x$ -Achse) waagrechte Asymptote für  $x \rightarrow +\infty$ .

$f(0) = 0,5e \approx 1,36$   
 $f(1) = -0,5$





<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	<b>04</b>

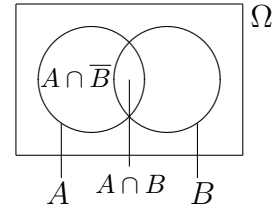
1. Betrachtet man das nebenstehende Diagramm, so sieht man  $A \cup B = \underbrace{(A \cap \bar{B})}_{E_1} \cup \underbrace{B}_{E_2}$ , wobei dann  $E_1 \cap E_2 = \{\}$ , wende

also Axiom (3) an:  $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$ .

Ebenso ist  $A = \underbrace{(A \cap \bar{B})}_{E_1} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{E_2}$  disjunkt und somit

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$ , also  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ .

Hieraus folgt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



2.  $\mu = 295 \cdot 0,03 + 296 \cdot 0,18 + 297 \cdot 0,45 + 298 \cdot 0,22 + 299 \cdot 0,07 + 300 \cdot 0,05 = 297,27$   
 $V(X) = (295 - \mu)^2 \cdot 0,03 + (296 - \mu)^2 \cdot 0,18 + \dots = 1,1771$ , also  $\sigma = 1,0849$

3. (a) Grundraum  $\Omega$ : 6-Tupel mit jeweils den Buchstaben A, B, C, je 3 Möglichkeiten für jede Stelle, also  $|\Omega| = 3^6$ .

Aus den 6 Stellen werden 2 ausgewählt für den Buchstaben A, dann aus den restlichen 4 wieder 2 für B, also  $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$  Möglichkeiten.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

(b) Drei Wahlschritte ergeben sich, wenn im ersten Wahldurchgang ein Ergebnis wie AAABBC erscheint und dann in der Stichwahl der vorher C Wählende sich mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  für B entscheidet.

Erster Wahlgang: 3 Möglichkeiten, den Kandidaten mit 3 Stimmen auszuwählen, dann 2 Möglichkeiten, den mit 2 Stimmen auszuwählen; für die Auswahl der Stellen im 6-Tupel, auf denen der drei mal vorkommende Buchstabe gesetzt wird, gibt es  $\binom{6}{3}$  Möglichkeiten, denn für die Auswahl der Stelle mit dem einzelnen Buchstaben 3; insgesamt also Wahrscheinlichkeit  $\frac{3 \cdot 2 \cdot \binom{6}{3} \cdot 3}{3^6} \cdot \frac{1}{2} \approx 0,247$ .

(c) Sprunghöhe ablesen:  $P(X = 1) = 0,3$ ,  $P(X = 2) = 0,753 - 0,300 = 0,453$  und  $P(X = 3) = 1 - 0,753 = 0,247$ .

$$E(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,453 + 3 \cdot 0,247 = 1,947.$$

4. (a)  $P(\text{„4 Treffer“}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13 \, 983 \, 816} \approx 0,00097 = 0,097 \%$

(b) 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, dann 48 für die zweite usw., also  $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{43!} = 10 \, 068 \, 347 \, 520$

5. (a)  $P(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{16}{4}} = 0,21758$

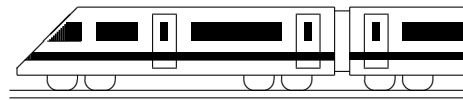
$$P(B) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{12}{0} + \binom{4}{0} \cdot \binom{12}{4}}{\binom{16}{4}} = 0,000025 + 0,27198 = 0,27200$$

$$P(C) = P(\text{„wsws“}) + P(\text{„swws“}) = \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{11}{13} + \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{3}{13} = 0,07253$$

(b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße „Anzahl gezogener weißer Kugeln“ hat gemäß  $P(X = 2) = P(A)$  mit entsprechenden weiteren Berechnungen wie  $P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{16}{4}} = 0,48352$  folgende Verteilung:

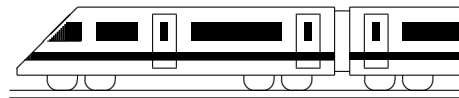
$a$	0	1	2	3	4
$P(X = a)$	0,27200	0,48352	0,21758	0,02637	0,27198

Somit ist tatsächlich  $P(X = 1)$  am größten.



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Binomialverteilung</b>	<b>05</b>

- Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$ : „Wann unter den  $n$  Versuchen kommen die  $k$  Treffer“.
- Die Annahme ist zu hinterfragen, da z. B. einem im vorhergehenden Schritt zu kurz geschnittenes Blatt ein längeres nachfolgen könnte.
  - $P_{n=100,p=0,8}(k \geq 98) = B(100; 0,8; 98) + B(100; 0,8; 99) + B(100; 0,8; 100)$   
 $= \binom{100}{98} 0,8^{98} 0,2^2 + \binom{100}{99} 0,8^{99} 0,2 + \binom{100}{100} 0,8^{100}$   
 $= \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 0,8^{98} 0,2^2 + 100 \cdot 0,8^{99} 0,2 + 1 \cdot 0,8^{100} = 6,8 \cdot 10^{-8}$
    - $P_{n=100,p=0,8}(k \leq 90) = 0,99767$
    - $P_{n=100,p=0,8}(k \geq 90) = 1 - P_{n=100,p=0,8}(k \leq 89) = 1 - 0,99430 = 0,00570$
  - $P_{n=50,p=0,8}(k < 45) = P_{n=50,p=0,8}(k \leq 44) = 0,95197$   
Für die zweite Frage soll gelten:  $P_{n=50,p=0,8}(k < k_0) = P_{n=50,p=0,8}(k \leq k_0 - 1) \geq 0,99$ . Gemäß Tafel ist dies für  $k_0 - 1 \geq 46$  der Fall, also  $k_0 = 47$ .
  - $\mu = 295 \cdot 0,03 + 296 \cdot 0,18 + 297 \cdot 0,45 + 298 \cdot 0,22 + 299 \cdot 0,07 + 300 \cdot 0,05 = 297,27$   
 $V(X) = (295 - \mu)^2 \cdot 0,03 + (296 - \mu)^2 \cdot 0,18 + \dots = 1,1771$ , also  $\sigma = 1,0849$
- $M$ : Mädchen,  $S$ : Sparer.  $P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ .
  - Ohne Zurücklegen:  $P(E) = \frac{\binom{8}{1} \binom{17}{3}}{\binom{25}{4}} = 0,43004$  Differenz also größer als 0,02.  
Mit Zurücklegen:  $B(4; \frac{8}{25}; 1) = \binom{4}{1} 0,32 \cdot 0,68^3 = 0,40247$   
Bei Ziehen ohne Zurücklegen aus einer größeren Personenzahl verändert das Ziehen eines Treffers die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Zug wieder einen Treffer zu ziehen, kaum, so dass dann Ziehen ohne Zurücklegen wie Ziehen mit Zurücklegen gerechnet werden kann.
  - Das heißt, unter den ersten drei kein weiblicher Treffer:  
 $P_{n=3,p=0,44}(k=0) = 0,56^3 = 0,17562$
    - Das heißt, mindestens ein Treffer unter den ersten vier:  
 $P_{n=4,p=0,44}(k \geq 1) = 1 - P_{n=4,p=0,44}(k=0) = 1 - 0,56^4 = 0,90166$
    - Das heißt, unter den ersten drei ein Treffer, dann wieder ein Treffer:  
 $B(3; 0,44; 1) \cdot 0,44 = \binom{3}{1} 0,44 \cdot 0,56^2 \cdot 0,44 = 0,18214$
  - Soll gelten:  $P_{n=?,p=\frac{4}{25}}(k \geq 1) > 0,99$ , also  $1 - P_{n=?,p=0,16}(k=0) < 0,01$ .  
 $0,84^n < 0,01$ ;  $n \ln 0,84 < \ln 0,01$ .  
Da  $\ln 0,84$  negativ ist, ändert sich beim Dividieren das Ungleichungszeichen:  
 $n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,84} \approx 26,4$ , also mindestens 27.
  - $\mu = np = 200 \cdot \frac{10}{25} = 200 \cdot 0,4 = 80$ .  $B(200; 0,4; 80) = 0,05751$ .  
 $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 6,9282$ .  
 $P_{n=200,p=0,4}(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = P_{n=200,p=0,4}(74 \leq k \leq 86) =$   
 $P_{n=200,p=0,4}(k \leq 86) - P_{n=200,p=0,4}(k \leq 73) = 0,82607 - 0,17423 = 0,65184$
- Da die Zufallsgröße Werte im Bereich von 0 bis 30 annehmen kann, ist  $n = 30$ . Die höchste Säule (wahrscheinlichster Wert) ist bei  $k = 24$ . Da dieser in der Nähe von  $\mu = np$  liegt, ist  $24 \approx 30p$ , somit  $p \approx \frac{24}{30} = 0,8$ . Also  $p = 0,8$ .
  - $B(30; 0,2; 12)$  ist die W. für 12 Treffer bei Trefferwahrscheinlichkeit 0,2. Dies ist gleichbedeutend mit 18 Nieten bei Nietenwahrscheinlichkeit  $1 - 0,2 = 0,8$ . Somit ist  $B(30; 0,2; 12) = B(30; 0,8; 18)$ , wobei die Säule laut Histogramm etwa 0,5 mm hoch ist, also  $B(30; 0,2; 12) \approx 0,005$  (tatsächlich 0,0064).



# 12. Klasse Lösungen

**12**

## Testen von Hypothesen

**06**

1.

Treffer: Befragte Person ist Wähler der Partei, Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  unbekannt.

$$H_0: p \leq 0,05, H_1: p > 0,05$$

ER:  $H_0$  ablehnen, falls Trefferzahl  $k \geq k_0$ .

$\alpha$ -Fehler:  $H_0$  abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Partei überspringt die 5 %-Hürde, obwohl sie nicht den dafür notwendigen Wähleranteil hat (= schwerer Fehler):

$$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{n=200, p=0,05}(k \geq k_0) \leq 0,01, \text{ d. h. } P_{n=200, p=0,05}(k \leq \underbrace{k_0 - 1}_{18 \text{ (Tafel/TR)}}) \geq$$

$$0,99, \text{ also } k_0 = 19.$$

ER also:  $H_0$  ablehnen, d. h. kein Wahlkampf, falls mind. 19 Wähler in der Stichprobe.

2.

Treffer: Spiel mit sechs Würfeln; hierfür: 6 Mögl. beim ersten Wurf, dann 5 beim zweiten usw., beim Laplace-Würfel also Trefferw.  $p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{120}{7776}$ , sonst  $p$  unbekannt.

$$H_0: p \geq \frac{120}{7776}, H_1: p < \frac{120}{7776}$$

ER:  $H_0$  ablehnen, falls Trefferzahl  $k \leq k_0$ .

$$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{n=1000, p=120/7776}(k \leq k_0) \leq 0,05, \text{ Tabelle} \rightarrow k_0 = 8.$$

ER also:  $H_0$  ablehnen, d. h. den Würfel signifikant ablehnen, bei  $\leq 8$  Treffern.

3.

(a) Treffer: Steinplatte ist 1. Wahl, Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  unbekannt.

$$H_0: p \leq 0,70, H_1: p > 0,70$$

$\alpha$ -Fehler:  $H_0$  abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Steinplattenmenge sei hochwertig, obwohl sie nicht den nötigen Anteil hat  $\rightarrow$  Verärgerung des Kunden, schwerer Fehler.

(b) ER:  $H_0$  ablehnen, falls  $k \geq k_0$ .

$$\alpha = P_{n=50, p=0,70}(k \geq k_0) \leq 0,05,$$

$$\text{d. h. } P_{n=50, p=0,70}(k \leq \underbrace{k_0 - 1}_{40 \text{ (Tafel/TR)}}) \geq 0,95,$$

$$\text{also } k_0 = 41.$$

ER also:  $H_0$  ablehnen, d. h. Steinplattenmenge für gut halten, falls mind. 41 Platten 1. Wahl in der Stichprobe.

(c) Bei 20 % von 50 = 10 Steinen 2. Wahl, d. h. 40 Steine 1. Wahl, genügt dies also nicht, um die Lieferung für signifikant gut zu halten (weitere Tests nötig).

$$(d) \beta = P_{n=50, p=0,85}(k \leq 40) = 0,20891 \text{ (Tafel/Taschenrechner)}$$

4.

(a) Treffer: Kandidat zieht Joker, Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  unbekannt.

$\alpha$ -Fehler: Den Kandidaten aufgrund der Trefferzahl  $k$  für unbegabt halten, obwohl der in Wirklichkeit gut ist. Daher:

$$H_0: p = 0,5, H_1: p = \frac{6}{110}.$$

ER:  $H_0$  ablehnen, falls  $k \leq 1$ .

$$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) =$$

$$P_{n=12, p=6/110}(k \leq 1) \approx 0,51 + 0,35 = 0,86 \text{ (Histogramm erste zwei Balken).}$$

$$\beta = P_{H_1}(H_0 \text{ nicht abgelehnt}) =$$

$$P_{n=12, p=0,50}(k \geq 2) = 1 - P_{n=12, p=0,50}(k \leq 1) = 1 - (0,5^{12} + \binom{12}{1} 0,5^{11}) = 0,9968$$

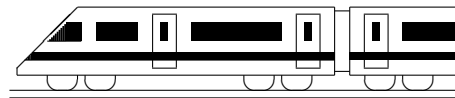
(b) ER jetzt:  $H_0$  ablehnen, falls  $k \leq k_0$ .

$\alpha = P_{n=48, p=6/110}(k \leq k_0) \leq 0,10$ , im Histogramm werden von 0 bis  $k_0$  so viele Balken genommen, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter 0,10 bleibt, also nur der erste, also  $k_0 = 0$ . Bereits bei einem erkannten Joker kann die Hypothese eines „Zufallstreffers“ nicht angenommen werden.

Dies beweist zwar noch nicht die Begabung des Kandidaten, der Kandidat wird sozusagen „mangels Beweisen“ („in dubio pro reo“) freigelassen.

(c) Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung der  $k$ -Achse müsste die zweite Graphik eigentlich 4-mal so breit gezeichnet werden; jedoch ist die Streuung  $\sqrt{npq}$  nur  $\sqrt{4} = 2$ -fach, so dass sich im Histogramm ein schmalerer Berg ergibt.

(d) Durch Erhöhung des Stichprobenumfangs können beide Fehler verkleinert werden.



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Quotientenregel</b>	<b>07</b>

1.

(a)  $f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot 2x - x^2 \cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$

(b)  $f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

(c)  $f(x) = 4 \cdot (3x - 2)^{-1}$ , also  $f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot (3x - 2)^{-2} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^2}$

(d)  $f'(x) = (7x - 1)^4 \cdot (-2)x^{-3} + 4(7x - 1)^3 \cdot 7 \cdot x^{-2} = \frac{(7x-1)^3(14x+2)}{x^3}$

(e)  $f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$

(f)  $f'(x) = \frac{(2x-1)^2 \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} = \frac{2(2x-1) - 4(2x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{-4x-6}{(2x-1)^3}$

(g)  $f'(x) = \frac{(e^x+1)2e^{2x} - (e^{2x}-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}$

(h)  $f(x) = \frac{x^2-12x+36}{x} = x - 12 + 36x^{-1}$   
 $f'(x) = 1 - 36x^{-2} = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2-36}{x^2}$   
 $f(x) = \frac{(x-6)^2}{x}$  hat bei  $x = 6$  eine doppelte Nullstelle, also einen Berührungspunkt mit der x-Achse, dort muss also eine waagrechte Tangente, also eine Nullstelle von  $f'$  vorliegen. Dies ist am Zähler sichtbar.

2.

Verschiedene Schreibweisen für den Funktionsterm:  $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \frac{1-x^3}{x} = x^{-1} - x^2$ .

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = \frac{\pm 1}{\pm 0} \rightarrow \pm \infty$  (Senkrechte Asymptote, Pol 1. Ordnung  $x = 0$ )

Nullstelle:  $f(x) = 0: 1 - x^3 = 0; x = 1$

Extremum und Monotonie:

$f'(x) = -x^{-2} - 2x = \frac{-1-2x^3}{x^2}$

$f'(x) = 0: -1 - 2x^3 = 0; x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f' > 0$  |  $f' < 0$  |  $f' < 0$

steigt | fällt | fällt

Max |  $\notin D$

$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} | -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  ist  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , also schmiegt sich der Graph von  $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$  an die Parabel  $y = -x^2$  an (also auch  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \rightarrow -\infty$ ).

3.

Ausmultiplizieren:  $f(x) = (e^{2x} - 1)e^{-3x} = e^{-x} - e^{-3x}$  (Potenzrechenregel  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ), somit  $f'(x) = -e^{-x} - (-3)e^{-3x} = -e^{-x} + \frac{3}{e^{3x}} = \frac{-e^{-x}e^{3x}}{e^{3x}} + \frac{3}{e^{3x}} = \frac{-e^{2x}+3}{e^{3x}}$ .

Quotientenregel:  $\frac{f'(x)}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{3x} \cdot 2e^{2x} - (e^{2x}-1) \cdot 3e^{3x}}{(e^{3x})^2} = \frac{2e^{5x} - 3e^{5x} + 3e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{-e^{5x} + 3e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{-e^{2x}+3}{e^{3x}}$  (mit  $e^{3x}$  kürzen, Potenzrechenregeln).

4.

$D = \mathbb{R}$

A:  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ :

Waagrechte Asymptote  $y = 0$

S:  $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$ :

Punktsymmetrie zum Ursprung

N:  $f(x) = 0: x = 0$

E:  $f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0: 1 - x^2 = 0; x_{1/2} = \pm 1$ .

$f' < 0$  |  $f' > 0$  |  $f' < 0$

fällt | steigt | fällt

Min | Max

$(-1 | -\frac{1}{2})$  |  $(1 | \frac{1}{2})$

W:  $f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-2x) - (1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$

$\frac{(x^2+1) \cdot (-2x) - (1-x^2) \cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

$f''(x) = 0: 2x^3 - 6x = 0;$

$2x(x^2 - 3) = 0;$

$x_1 = 0, x_{2/3} = \pm \sqrt{3}$ .

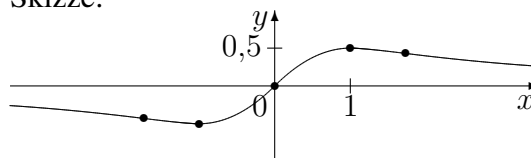
$f'' < 0$  |  $f'' > 0$  |  $f'' < 0$  |  $f'' > 0$

re.- | li.- | re.- | linksge-

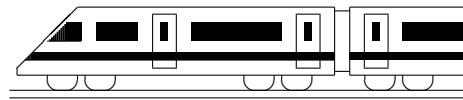
WP | WP | WP | krümmt

$(-\sqrt{3} | -\frac{\sqrt{3}}{4})$  |  $(0|0)$  |  $(\sqrt{3} | \frac{\sqrt{3}}{4})$

Skizze:



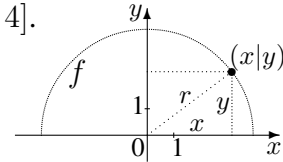
$W_f = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Umkehrfunktion, Wurzelfunktion</b>	<b>08</b>

1. Definitionsbereich:  $16 - x^2 \geq 0$ , also  $x^2 \leq 16$ , also  $D_f = [-4; 4]$ .  
 Abstand des Punktes  $(x|y) = (x|f(x)) = (x|\sqrt{16 - x^2})$  vom Nullpunkt gemäß Pythagoras:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{16 - x^2})^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = 4.$$

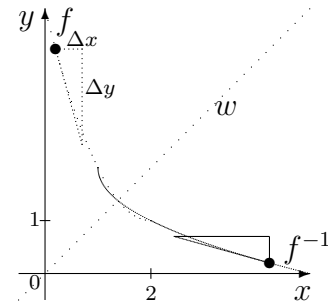


2. (a) Wegen „-“ wird die Wurzelfunktion  $y = \sqrt{x}$  an der  $x$ -Achse gespiegelt, wegen „ $x - 1$ “ um 1 nach rechts verschoben und wegen „ $+2$ “ um 2 in  $y$ -Richtung verschoben.

(b) Spiegeln an  $w$ : Aus z. B.  $(0,2|4,24)$  wird  $(4,24|0,2)$ .

(c) Eingezeichnet ist nebenstehend auch ein Steigungsdreieck sowie das gespiegelte Steigungsdreieck.

Dabei wird aus  $f'(0,2) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  beim Spiegeln  $(f^{-1})'(4,24) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ , allgemein also  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .



3.  $y = \frac{x-3}{x+1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Den Wertebereich findet man mit Hilfe einer kleinen Skizze oder im Laufe der Aufgaben-Bearbeitung.

Variablentausch:  $x = \frac{y-3}{y+1}$ ,  $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Auflösen (mit HN multiplizieren, gesuchte Variablen-Stücke auf eine Seite):

$$x(y + 1) = y - 3; xy + x = y - 3; 3 + x = y - xy; 3 + x = y(1 - x); y = \frac{3+x}{1-x}$$

$$\text{Also: } f^{-1}(x) = \frac{3+x}{1-x}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

4. (a) Für die Umkehrbarkeit ist notwendig, dass man zu jedem  $y$ -Wert von  $W_f$  **genau einen**  $x$ -Wert hat. Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann hat sie diese Eigenschaft. Hier:  $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$  für alle  $x$ , also ist die Funktion streng monoton steigend und somit umkehrbar.

(b) A, C: Umkehrbar, da auf jeder  $y$ -Höhe der Graph maximal einen Punkt aufweist. B: Nicht umkehrbar, da es z. B. zum  $y$ -Wert  $y = 2$  mehrere  $x$ -Werte gibt.

(c) Der Graph aus Teilaufgabe (b) Bild C ist umkehrbar, aber weder streng monoton steigend noch streng monoton fallend.

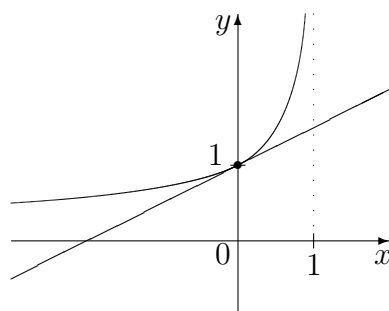
5. (a)  $D_f = [0; \infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ,  $D_{f'} = ]0; \infty[$

$$(b) f(x) = (1 - 4x^2)^{1/2}; f'(x) = \frac{1}{2}(1 - 4x^2)^{-1/2} \cdot (-8x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Für die Wurzel muss  $1 - 4x^2 \geq 0$  gelten, also  $x^2 \leq \frac{1}{4}$ , also  $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

Da bei  $f'$  dieser Ausdruck im Nenner steht, ist dort sogar  $1 - 4x^2 > 0$  zu verlangen. Somit:  $D_f = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ ;  $D_{f'} = ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

6.  $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ ;  $f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2}$ .  
 $f'(0) = \frac{1}{2}$ , die Tangente hat also die Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

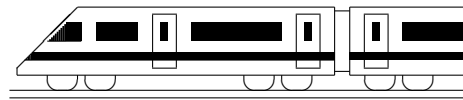


Näherung:

Für „kleine“  $x$  (nahe 0) gilt  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{2}x + 1$

Anwendung auf  $E = mc^2 = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ :

Für kleine  $v/c$ , d. h. für Geschwindigkeiten  $v$ , die klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c$ , gilt:  $E \approx m_0c^2(\frac{1}{2}(v/c)^2 + 1) = \frac{1}{2}m_0v^2 + m_0c^2$   
 (Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Ruheenergie  $m_0c^2$  und der kinetischen Energie)



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>In-Funktion</b>	<b>09</b>

1.

(a)  $D: 4x + 10 > 0; x > -2,5;$

$$D = ] - 2,5; \infty[.$$

$$f'_1(x) = \frac{1}{4x+10} \cdot 4 = \frac{2}{2x+5}$$

(b)  $D: -x > 0; x < 0; D = ] - \infty; 0[.$

$$f'_2(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

(c)  $D: x^2 > 0; x \neq 0; D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

$$f'_3(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}$$

(oder mit  $f_3(x) = 3 \cdot 2 \ln(x)$ )

(d)  $D: x > 0, D = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[.$

$$f'_4(x) = (x - e) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$$

(e)  $D: v(x) = \frac{2x+5}{x-1} > 0.$

Vorzeichenbereiche (vgl. grund107.pdf):

$$\frac{v > 0}{-2,5} \quad \frac{v < 0}{1} \quad \frac{v > 0}{1}$$

Also  $D = ] - \infty; -2,5[ \cup ]1; \infty[.$

$$f_5(x) = \ln(2x + 5) - \ln(x - 1)$$

$$f'_5(x) = \frac{1}{2x+5} \cdot 2 - \frac{1}{x-1}$$

(f)  $D: 7 - x > 0; x < 7; D = ] - \infty; 7[.$

$$f'_6(x) = e^x \cdot \frac{1}{7-x} \cdot (-1) + e^x \cdot \ln(7-x)$$

((d) und (f) Ableitung mit Produktregel)

2.

Produktregel:

$$F'(x) = x^{\frac{1}{x}} + 1 \cdot \ln x - 1 = \ln x = f(x)$$

$$h(x) = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \text{ also}$$

Stammfunktion  $H(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot (x \ln x - x) + C$

und Ableitung  $h'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}.$

3.

(a)  $F(x) = 2x - 7 \ln x + C$

(b)  $g(x) = \frac{x-11}{x^2} = \frac{1}{x} - 11x^{-2}$ , also

$$G(x) = \ln x + 11x^{-1}$$

4.

(a)  $\ln x = -2; x = e^{-2}$

(b)  $\ln(x^2 - 1) = 10; x^2 - 1 = e^{10};$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{e^{10} + 1}$$

(c)  $0,9 < 1 - 0,99^x; 0,99^x < 0,1;$

$$\ln 0,99^x < \ln 0,1; x \ln 0,99 < \ln 0,1;$$

$$x > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,99}; x > 229,1 \dots$$

5.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x - \ln(x-1),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0 \text{ für alle } x \in D_f =$$

 $]1; \infty[$ , also ist  $f$  in diesem Bereich streng monoton fallend und daher umkehrbar.

$$y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right);$$

$$x \leftrightarrow y:$$

$$x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right);$$

$$e^x = \frac{y}{y-1};$$

$$(y-1)e^x = y;$$

$$ye^x - e^x - y = 0;$$

$$y(e^x - 1) = e^x;$$

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}; \quad f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

6.

$$D_f = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[.$$

Nullstellen:  $f(x) = (x+2) \ln x = 0;$

$$(x+2) = 0 \text{ oder } \ln x = 0;$$

 $x = -2$  oder  $x = 1$ ; da  $-2$  nicht im Definitionsbereich liegt, bleibt nur Nullstelle  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow -\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty.$$

Produktregel:  $f'(x) = (x+2) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x.$

Tangente im Punkt  $P(2; 4 \ln 2):$

$$m = f'(2) = 2 + \ln 2.$$

Also Ansatz  $y = (2 + \ln 2)x + t.$

$$P: 4 \ln 2 = (2 + \ln 2) \cdot 2 + t, \text{ also } t = 2 \ln 2 - 4.$$

Somit Tangente:  $y = (2 + \ln 2)x + 2 \ln 2 - 4.$

Aufgrund der Limes gehört zu  $f$  der Graph C. Sowohl A als auch die um 3 Einheiten nach oben verschobene Funktion B sind Stammfunktionen, da deren Steigungsverhalten durch das Vorzeichen von  $f$  richtig beschrieben wird. $F$  ist Stammfunktion, denn (Produktregel):

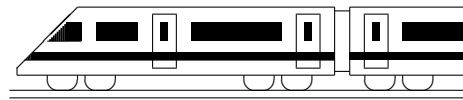
$$F'(x) =$$

$$= (0,5x^2 + 2x)^{\frac{1}{x}} + (x+2) \ln x - 0,5x - 2 =$$

$$= (0,5x + 2) + (x+2) \ln x - 0,5x - 2 =$$

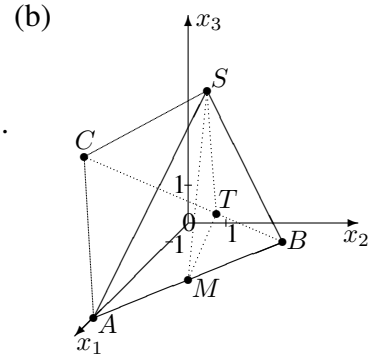
$$= (x+2) \ln x = f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 \text{ (denn das Polynom } 0,5x^2 + 2x \text{ konvergiert stärker als die ln-Funktion).}$$



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Koordinatengeometrie</b>	<b>10</b>

1. (a)  $\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ , also  $M(4|2|0,5)$ .  
 $\vec{CT} = \frac{2}{3}\vec{CB}$ , d. h.  $\vec{T} - \vec{C} = \frac{2}{3}(\vec{B} - \vec{C})$ , also  
 $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 - 1,5 \\ 4 - (-2) \\ 1 - 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ ,  $T(2,5|2|1,5)$ .



(c)  $V_{ABCS} = \frac{1}{6}|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}| =$   
 $= \frac{1}{6} \left| \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| =$   
 $= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 1,5 \\ 18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6}|-24 + 3 + 90| = \frac{23}{2}$ .

Analog  $V_{MBTS} = \frac{1}{6}|(\vec{MB} \times \vec{MT}) \circ \vec{MS}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right| = \frac{23}{12}$ .

(d)  $\vec{TS} = \vec{TB} + \vec{BA} + \vec{AS} = \frac{1}{3}\vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AS} = \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BA} + \vec{AS} =$   
 $= \frac{1}{3}(-\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} + \vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w}$ .

2. (a)  $|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}$ .

Analog  $|\vec{BD}| = |\vec{D} - \vec{B}| = \sqrt{0,25 + 2,25 + 0} = \sqrt{2,5} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$ ,

$|\vec{AD}| = |\vec{D} - \vec{A}| = \sqrt{12,25 + 0,25 + 0} = \sqrt{12,5} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ .

$\alpha = \sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AD})$ :  $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{3 \cdot 3,5 + (-1) \cdot 0,5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,5}} \approx 0,894$ , also  $\alpha \approx 26,6^\circ$ .

$\beta = \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BD})$ :  $\cos \beta = \frac{\vec{BA} \circ \vec{BD}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BD}|} = \frac{-3 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2,5}} = 0$ , also  $\beta = 90^\circ$ .

Gemäß der Winkelsumme im Dreieck ist  $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 63,4^\circ$ .

(b)  $\vec{DC} = \vec{AB}$ , also  $\vec{C} = \vec{D} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ , also  $C(5,5|-1,5|1)$ .

(c)  $\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Die Länge 5 dieses Vektorprodukts ist die Fläche des Parallelogramms  $ABCD$ .

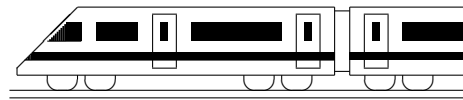
Die  $x_3$ -Richtung dieses Vektors musste sich ergeben, da  $\vec{AB} \times \vec{AD}$  senkrecht auf  $\vec{AB}$  und  $\vec{AD}$  steht, also senkrecht auf der Parallelogramm-Fläche, und dieses liegt wegen der gemeinsamen  $x_3$ -Koordinate in der zur  $x_1x_2$ -Grundebene parallelen Ebene  $x_3 = 1$ .

(d)  $A'B'D'$  ist ebenso wie  $ABD$  ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken auf dem Thaleskreis über  $\vec{A'D'}$  liegen, also mit Mittelpunkt  $M'(0,75|-0,75)$  (aus  $\vec{M}' = \frac{1}{2}(\vec{A}' + \vec{D}')$ ) und Radius  $r = \frac{1}{2}|\vec{A'D}'| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$ .

3. Es muss gelten:  $\vec{AB} \circ \vec{AC}_t = 0$ , also

$(-3-2) \cdot (t-2) + (-3-4) \cdot (t-4) + (-3-1) \cdot (0-1) = 0$ , also  $-5t + 10 - 7t + 28 + 4 = 0$ , also  $-12t = -42$ , somit  $t = 3,5$ .

4.  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{\sqrt{16+9+0} \cdot \sqrt{4+4+1}} \approx -0,133$ , also  $\varphi \approx 97,7^\circ$ .



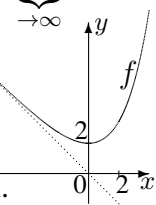
<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Kompakt-Überblick zum Grundwissen</b>	<b>K</b>

1.  
 $f'_a(x) = 12x^3 - 24ax^2 = x^2(12x - 24a) = 0$ ;  
 $x_{1/2} = 0$  (doppelt, kein Vorzeichenwechsel, kein Extremum),  $x_3 = 2a$  (einfach, Vorzeichenwechsel, also Extremum).

$f(2a) = 3 \cdot 16a^4 - 8a \cdot 8a^3 + 16a^4 + a + 3 = a + 3$   
 Ex( $2a|a + 3$ ) mit  $x = 2a$ ,  $y = a + 3$ , also  $a = \frac{1}{2}x$ , also  $y = \frac{1}{2}x + 3$ ; auf dieser Geraden liegen die Extrema.

2.  
 $f'_1(x) = 2 \sin x + (2x - 6) \cos x$ .  
 $f'_2(x) = -(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6 \cdot (-1)x^{-2}) \cdot \sin(\sqrt{x} - \frac{6}{x})$

3.  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{0,5x} - x) \rightarrow \infty$ , schräge As.  $y = -x$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(2e^{0,5x} - 1)}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$   
 $f'(x) = e^{0,5x} - 1 = 0$ ;  $x = 0$ .  
 $f'(x) < 0$  fällt,  $f'(x) > 0$  steigt, Min (0|2)  
 $W_f = [2; \infty[$ . Keine Nullstellen.



4.  
 Urnenexp. „Ziehen ohne Zurücklegen“.  
 $P(A_2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{48}{220} \approx 0,22$ , ebenso folgt mit  $P(A_i) = \frac{\binom{4}{i} \cdot \binom{8}{3-i}}{\binom{12}{3}}$ :  $P(A_0) = \frac{56}{220} \approx 0,25$ ,  
 $P(A_1) = \frac{28}{55} \approx 0,51$ ,  $P(A_3) = \frac{4}{220} \approx 0,02$ .  
 $\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{56}{220} + 1 \cdot \frac{112}{220} + 2 \cdot \frac{48}{220} + 3 \cdot \frac{4}{220} = 1$ .  
 $\sigma^2 = V(X) = E((X - \mu)^2) = (0 - 1)^2 \cdot \frac{56}{220} + (1 - 1)^2 \cdot \frac{112}{220} + (2 - 1)^2 \cdot \frac{48}{220} + (3 - 1)^2 \cdot \frac{4}{220}$ ,  
 $\sigma \approx 0,739$

5.  
 Treffer: Gefürchteter Lehrer,  $p = \frac{1}{3}$ ,  $n = 3$   
 $B(3; \frac{1}{3}; 2) + B(3; \frac{1}{3}; 3) = 0,25926$   
 (oder  $P_{n,p}(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,74074$ )  
 $\mu = np = 1$ ,  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$

6.  
 Treffer: Befragte Person: „Kleeblatt = Glück“  
 $H_0 : p \leq 0,25$                        $H_1 : p > 0,25$   
 Entscheidungsregel:  $H_0$  ablehnen („Schlag-

6. (Fortsetzung)  
 zeile trifft zu“, falls Trefferzahl  $k \geq k_0$   
 $\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P(k \geq k_0) \leq 0,05$ ;  
 $P_{n=100;p=0,25}(k \leq k_0 - 1) \geq 0,95$   
 Tafel/TR:  $k_0 - 1 = 32$ , also  $k_0 = 33$ .

7.  
 $f'_3(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot 1 - (x-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-x+5}{(x-1)^3}$ .

8.  
 Der Graph zu  $f$  ist der linke Ast einer gestauchten und so verschobenen  $x^4$ -Potenzfunktion, dass der Tiefpunkt (1| -3) ist (wegen strenger Monotonie in  $D_f$  umkehrbar).  
 $y = \frac{1}{2}(x - 1)^4 - 3$ ,  
 $x \in D_f = ] - \infty; 1]$ ,  $y \in W_f = [-3; \infty[$ .  
 $y \leftrightarrow x$ :  
 $x = \frac{1}{2}(y - 1)^4 - 3$ ,  $y \in ] - \infty; 1]$ ,  $x \in [-3; \infty[$   
 $2(x + 3) = (y - 1)^4$ ;  $y - 1 = \pm \sqrt[4]{2x + 6}$ ;  
 $y = 1 \pm \sqrt[4]{2x + 6}$ ;  
 wegen  $y \in ] - \infty; 1]$  ist „-“ zutreffend, also  
 $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[4]{2x + 6} = 1 - (2x + 6)^{0,25}$ ,  
 $D_{f^{-1}} = [-3; \infty[$ ,  $W_{f^{-1}} = ] - \infty; 1]$   
 $(f^{-1})'(x) = -0,25(2x + 6)^{-0,75}$ ,  
 $D_{(f^{-1})'} = ] - 3; \infty[$

9.  
 $D_f: -4 - 2x > 0$ , also  $D_f = ] - \infty; -2[$ .  
 $f'(x) = \frac{1}{-4-2x} \cdot (-2) = \frac{1}{x+2}$ .  
 Nullstelle:  $-4 - 2x = 1$ ;  $x = -2,5$ .

10.  
 $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 22 - 2 \\ 9 - (-3) \\ 9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  
 also  $|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2} = 25$ .  
 Ebenso  $|\vec{AD}| = |\vec{AE}| = 25$ .  
 $\vec{AB} \circ \vec{AD} = 20 \cdot 15 + 12 \cdot (-16) + 9 \cdot (-12) = 0$ ,  
 also  $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ . Ebenso  $\vec{AB} \perp \vec{AE}$ ,  $\vec{AD} \perp \vec{AE}$ .  
 $\vec{G} = \vec{D} + \vec{AB} + \vec{AE}$  ergibt  $G(37|8| -23)$ .  
 Vektor  $\vec{AB} \times \vec{AD}$  steht auf  $\vec{AB}$  und  $\vec{AD}$  senkrecht (also Vielfaches von  $\vec{AE}$ ), seine Länge = Fläche des davon aufgespannten Parallelogramms (hier: Quadrat  $ABCD$ ).  
 $\cos \varphi = \frac{|\vec{AB} \circ \vec{AG}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AG}|} = \frac{20 \cdot 35 + 12 \cdot 11 + 9 \cdot (-23)}{25 \cdot \sqrt{35^2 + 11^2 + (-23)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  
 also  $\varphi \approx 55^\circ$