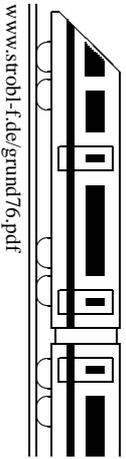


7. Klasse TOP 10 Grundwissen	7
Lösen linearer Gleichungen: Sonderfälle	06



Grundmenge

Je nach Situation kann eine Grundmenge vorgegeben sein, d. h. die Menge der Zahlen, die als Lösung in Frage kommen; beispielsweise bei Textaufgaben kann es sein, dass eine Anzahl gesucht ist, also $G = \mathbb{N}_0$ sinnvoll ist. Liegt die errechnete Lösung nicht in der Grundmenge, so gibt es keine akzeptable Lösung; die Lösungsmenge L ist dann die leere Menge.

Beispiel 1: Gibt es eine natürliche Zahl x , deren Achtfaches ebenso groß ist wie das doppelte der Summe von 4 und x ?

$$\begin{aligned}
 8x &= 2(x + 4) & G &= \mathbb{N} \\
 8x &= 2x + 8 & | - 2x \\
 6x &= 8 & | : 6 \\
 x &= \frac{4}{3} & \notin G & \quad L = \{\}
 \end{aligned}$$

Wenn nichts anderes dasteht, ist die Grundmenge die Menge aller Zahlen, die wir kennen.¹

Sonderfälle

Manchmal ergeben sich Gleichungen vom Typ $0 = 0$ oder $0 = 1$.

Beim Typ $0 = 0$ („**allgemeingültige Gleichung**“) hat man in jedem Fall eine wahre Aussage, man kann also für x jede Zahl einsetzen; es ist also $L = G$ bzw. $L = \mathbb{Q}$.

Beim Typ $0 = 1$ („**unerfüllbare Gleichung**“) hat man in jedem Fall eine falsche Aussage, es gibt also keine Zahl, die für x eingesetzt werden kann; es ist also $L = \{\}$.

Beispiel 2: $5x - (36 - 4x) = 9(x - 4)$; $9x - 36 = 9x - 36$; $0 = 0$; $L = \mathbb{Q}$.

Beispiel 3: $5x - (3 - 4x) = 9(x + 4)$; $9x - 3 = 9x + 36$; $-3 = 36$; $L = \{\}$.

Merke ferner: **Nie durch eine Lösungsvariable dividieren!** Sondern: Nach 0 auflösen, als Produkt schreiben und sagen: Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Beispiel 4: $5x = 7x$

Nicht durch x dividieren (dies würde $5 = 7$ und dann die falsche Lösungsmenge liefern), sondern:

$$\begin{aligned}
 5x &= 7x & | - 5x \\
 0 &= 7x - 5x \\
 0 &= 2x & | : 2 \\
 0 &= x & \quad L = \{0\}
 \end{aligned}$$

Beispiel 5:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 7x & | - 7x \\
 x^2 - 7x &= 0 \\
 x \cdot (x - 7) &= 0
 \end{aligned}$$

Dieses Produkt ist 0, wenn $x = 0$ oder $x - 7 = 0$ ist, also

$$x = 0 \text{ oder } x = 7 \quad L = \{0; 7\}$$

¹In der 7. Klasse also $G = \mathbb{Q}$, ab der 9. Klasse $G = \mathbb{R}$.