

Beispiel:

$$2x - 3y = 7 \quad (\text{I})$$

$$4x + 5y = -8 \quad (\text{II})$$

Einsetzverfahren

Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf und setze in die andere Gleichung ein:

$$\text{I nach } x \text{ aufgelöst: } x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}y \quad (\text{I}')$$

$$\text{In II eingesetzt: } 4 \cdot \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}y\right) + 5y = -8$$

Jetzt hat man eine Gleichung, die nur noch y enthält (x ist eliminiert worden); löse diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 14 + 6y + 5y &= -8 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Berechne die andere Unbekannte durch Einsetzen in I':

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-2) = \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge enthält genau ein Zahlenpaar als Lösung:

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -2\right) \right\}$$

Man hat jeweils Wahlmöglichkeiten, welche Variable man eliminiert; wähle geschickt!

Spezialfälle

In Ausnahmefällen kann sich ein Widerspruch von der Sorte $0 = 1$ ergeben (dann ist $L = \{\}$) oder eine allgemeingültige Gleichung der Sorte $0 = 0$ (dann hat man eigentlich nur eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen).

Graphisches Lösungsverfahren

Jede Gleichung wird nach derselben Variablen aufgelöst; die sich dadurch ergebende lineare Funktion wird im Koordinatensystem als Gerade dargestellt; gemeinsame Punkte stellen die gesuchte „simultane“ Lösung dar.

Beispiel: Autofahrt einer Mutter (erfahren mit $1 \frac{\text{km}}{\text{min}}$) mit ihrer Tochter (Führerscheinneuling mit $0,8 \frac{\text{km}}{\text{min}}$). Die Tochter soll gleich lange wie die Mutter fahren. Sie wollen eine Strecke von insgesamt 7 km zurücklegen. Wie lange darf die Tochter/die Mutter am Steuer sitzen?

Sei x die Fahrzeit der Tochter in min, y die der Mutter.

$$\text{I. } x = y$$

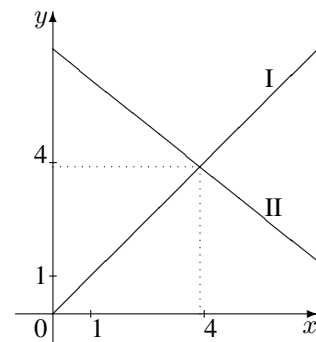
$$\text{II. } 0,8 \cdot x + 1 \cdot y = 7$$

$$\text{Aufgelöst nach } y: \text{ I. } y = x$$

$$\text{II. } y = 7 - 0,8x$$

Der Grafik entnimmt man den Schnittpunkt mit $x \approx 3,9$, $y \approx 3,9$. Tochter und Mutter dürfen je ca. 3,9 min am Steuer sitzen.

Vorteil des graphischen Verfahrens: Man kann weitere Punkte relativ leicht interpretieren; z. B. $(5|3)$ bedeutet, dass zwar 7 km zurückgelegt werden, aber die Tochter würde länger als die Mutter fahren; bei $(5|5)$ würden Mutter und Tochter gleich lange am Steuer sitzen, aber es würden mehr als 7 km zurückgelegt werden.



Additionsverfahren

Schreibe die Gleichungen ordentlich untereinander und multipliziere jede Gleichung so, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden; anschließend werden beide Seiten der Gleichungen addiert. Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 2x - 3y = 7 \quad | \cdot 5 \\ \text{II} \quad 4x + 5y = -8 \quad | \cdot 3 \\ \hline \text{I}' \quad 10x - 15y = 35 \\ \text{II}' \quad 12x + 15y = -24 \\ \hline \text{I}' + \text{II}' \quad 22x = 11 \\ \qquad \qquad \qquad x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Jetzt Gegenzahlen $-15/+15!$
Diesen Zwischenschritt schreibt man in der Regel nicht hin, sondern addiert gleich beide Seiten der Gleichungen im Kopf ($5 \cdot 2x + 3 \cdot 4x = 22x$ usw.).

Die andere Unbekannte y berechnet man durch Einsetzen in I oder II:

$$\begin{aligned} \text{in I: } \quad 2 \cdot \frac{1}{2} - 3y &= 7 \\ y &= -2 \\ L &= \left\{ \left(\frac{1}{2}; -2\right) \right\} \end{aligned}$$