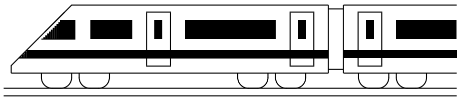


8. Klasse TOP 10 Mathematik — 08
Gesamtes Grundwissen mit Übungen — G

Grundwissen Mathematik 8. Klasse: Die 10 wichtigsten Themen auf jeweils einer Seite!

Zum Wiederholen kann man die Übungen des Kompakt-Überblicks verwenden.

8/1	Funktionen verstehen	G	Ü	L
8/2	Lineare Funktionen	G	Ü	L
8/3	Proportionalität	G	Ü	L
8/4	Ungleichungen, Potenzgesetze	G	Ü	L
8/5	Gebrochen-rationale Funktionen	G	Ü	L
8/6	Rechnen mit Bruchtermen	G	Ü	L
8/7	Bruchgleichungen, Auflösen von Formeln	G	Ü	L
8/8	Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente	G	Ü	L
8/9	Lineare Gleichungssysteme	G	Ü	L
8/10	Kreis, Prisma, Zylinder	G	Ü	L
8/K	Kompakt-Überblick zum Grundwissen	G	Ü	L

G=Grundwissen, Ü=Übungen, L=Lösungen

8. Klasse TOP 10 Grundwissen	8
Funktionen verstehen	**01**

Wesentliches Kennzeichen einer **Funktion** ist: Zu jedem x-Wert gehört genau ein y-Wert.

Meistens gibt es einen **Funktionsterm** (eine Formel, siehe auch Terme → grund71.pdf), die angibt, wie man zu einem gegebenen x-Wert den zugehörigen y-Wert (Funktionswert) berechnet, z. B. mit der Funktionsgleichung

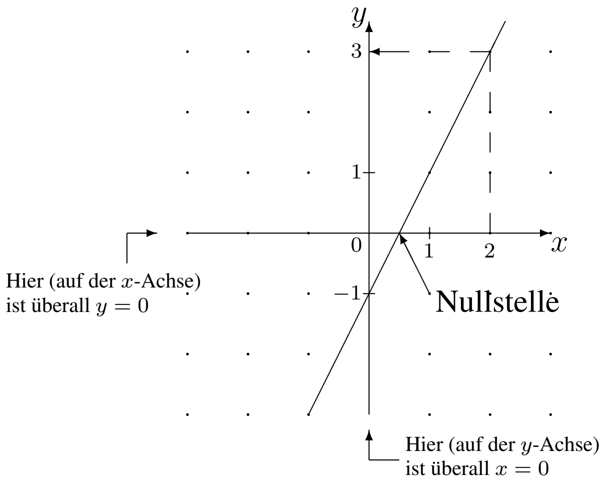
$$y = \underbrace{2x - 1}_{\text{Funktionsterm, Bezeichnung z. B. } f(x)}$$

Durch Einsetzen einiger x-Werte berechnet man eine **Wertetabelle**:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	1	3

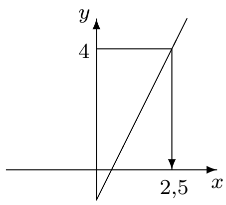
Die Wertepaare (x-Wert, zugehöriger y-Wert), z. B. $(-2; -5)$ usw., stellt man in einem Koordinatensystem dar:

Funktionsgraph:
Er besteht aus allen Punkten $(x; y)$, für die die Gleichung $y = 2x - 1$ gilt.

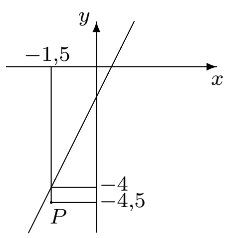


Wichtig:

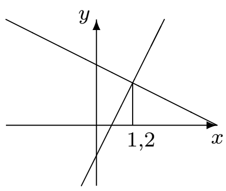
- x-Wert gegeben (z. B. $x = 2$), y-Wert gesucht (gestrichelte Linie im Bild oben): Einsetzen in die Funktionsgleichung, z. B. $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- y-Wert gegeben (z. B. $y = 4$), x-Wert gesucht (Bild rechts): Einsetzen in die Funktionsgleichung und Auflösen nach x, z. B. $y = 4$ eingesetzt in die Funktionsgleichung $y = 2x - 1$: $4 = 2x - 1 \Rightarrow x = 2{,}5$



- Den **Schnittpunkt mit der y-Achse** sieht man sofort (Verstehe: Die y-Achse sind Punkte mit $x = 0$, also Einsetzen von $x = 0$ in $y = 2x - 1$): $(0; -1)$
- Schnittpunkte mit der x-Achse heißen **Nullstellen** (Verstehe: Die x-Achse sind Punkte mit $y = 0$, also Einsetzen von $y = 0$ in die Funktionsgleichung):
  $0 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
  Merke: Nullstellen berechnet man, indem man den Funktionsterm gleich 0 setzt und nach x auflöst.
- Ob ein gegebener Punkt P (z. B. $(-1{,}5; -4{,}5)$) auf dem Graphen liegt, sieht man durch Einsetzen des x-Werts in den Funktionsterm $2x - 1$:
  $2 \cdot (-1{,}5) - 1 = -4 \neq -4{,}5$, P liegt also unterhalb der Geraden.



- Hat man zwei Funktionsgleichungen (z. B. $y = 2x - 1$ und $y = -\frac{1}{2}x + 2$) und sucht man **Schnittpunkte**, also Punkte $(x; y)$, für die *beide* Gleichungen gelten, so muss man die Funktionsterme gleichsetzen:
  $2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{2}{5} = 1{,}2$
  (Danach y-Wert durch Einsetzen von x in eine der Funktionsgleichungen; hier: $y = 2 \cdot 1{,}2 - 1 = 1{,}4$)



8. Klasse TOP 10 Grundwissen — 8
Lineare Funktionen — 02

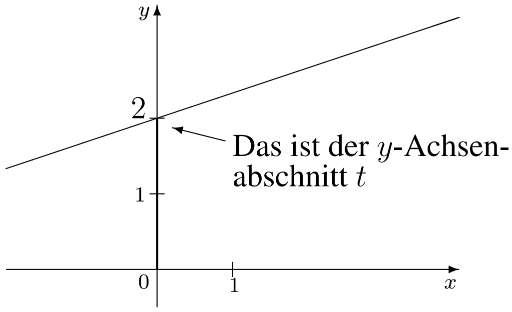
Lineare Funktionen haben eine Gleichung von der Form

$$y = mx + t$$

Steigung m — y-Achsenabschnitt t

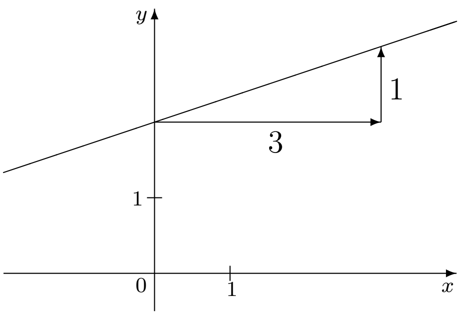
also z. B.

$$y = \tfrac{1}{3}x + 2$$



Die Zahl, die „alleine ohne x“ dasteht (die Konstante, hier 2), ist der y-**Achsenabschnitt** und zeigt, wo die Gerade die y-Achse schneidet (Einsetzen von $x = 0$, → Grundwissen 8. Klasse: Funktionen verstehen)

Die Zahl, die „bei x dabeisteht“ (der Koeffizient von x, hier $\frac{1}{3}$), ist die **Steigung**. Die Steigung $\frac{1}{3}$ bedeutet: Für je 1 Schritt nach rechts muss man gleichzeitig $\frac{1}{3}$ nach oben gehen, oder bequemer: 3 nach rechts, 1 nach oben.



Steigung $\dfrac{1}{3}$ ← 3 nach rechts, 1 nach oben

Damit die Zeichnung genauer wird, kann man das Steigungsdreieck mehrmals anhängen.

Besonderheiten:

- Steigung ist ganze Zahl, z. B. $y = 2x + 1{,}5 = \frac{2}{1}x + 1{,}5$:
  1 nach rechts, 2 nach oben
- Negative Steigung, z. B. $y = -2x + 1{,}5$: Abb. 1
  Fallende Gerade: 1 nach rechts, 2 nach unten
- Keine Konstante: $y = mx$, z. B. $y = 1{,}5x = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x + 0$: Abb. 2
  y-Achsenabschnitt ist 0, die Gerade geht durch den Ursprung (Proportionalität)
- Kein x-Term, z. B. $y = 2 = 0 \cdot x + 2$: Abb. 3
  Steigung 0, waagrechte Gerade in „Höhe“ 2
- Steigung 1, z. B. $y = x - 2 = \frac{1}{1}x - 2$: Abb. 4
- Steigung -1, z. B. $y = -x = -\frac{1}{1}x$: Abb. 5
- Wenn die Gleichung der Geraden nicht in der Form $y = \ldots$ gegeben ist, so muss man sie zuerst nach y auflösen (z. B. $x + y = 0$ ergibt die Gerade aus Abb. 5).
- Gerade durch zwei Punkte und senkrechte Geraden → ueb82.pdf

Abb. 1

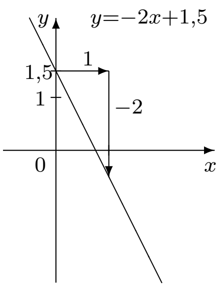


Abb. 2

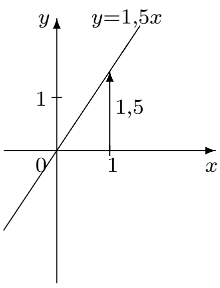


Abb. 3

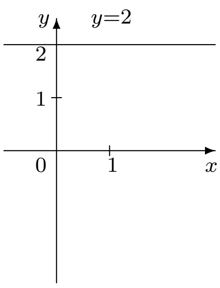


Abb. 4

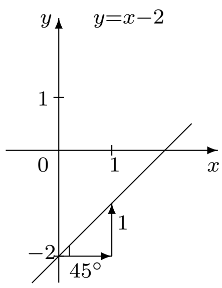
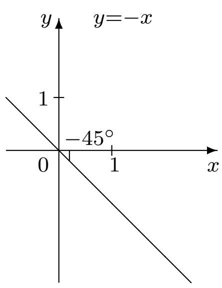
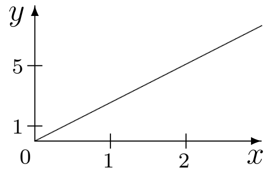


Abb. 5



8. Klasse TOP 10 Grundwissen | 8
Proportionalität | 03

Direkte Proportionalität (in Zeichen: $y \sim x$)
Beispiel: 1 kg einer bestimmten Obstsorte kostet 2,55 Euro. Jeder Menge x (in kg) ist der zu bezahlende Preis y (in Euro) zugeordnet:

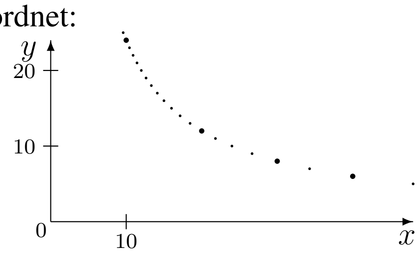


Menge x in kg	0	1	2	3	4	5
Preis y in Euro	0	2,55	5,10	7,65	10,20	12,75

Der Preis y kann berechnet werden durch $y = 2{,}55 \cdot x$.
Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto y = 2{,}55 \cdot x$ (Sprich: Jedem x wird zugeordnet $y = 2{,}55 \cdot x$).
Eigenschaften:

- Dem 2-fachen (3-fachen) x-Wert ist der 2-fache (3-fache) y-Wert zugeordnet.
- Quotientengleichheit: Dividiert man den y-Wert durch den x-Wert, erhält man jeweils den gleichen Wert (im Beispiel: $\frac{y}{x} = \frac{2{,}55}{1} = \frac{5{,}10}{2} = \ldots = 2{,}55$).
- Die Zuordnungsvorschrift ist von der Form $x \mapsto y = m \cdot x$.
  m heißt Proportionalitätsfaktor (im Beispiel: 2,55).
- Die Punkte im Schaubild liegen auf einer Ursprungsgeraden, d. h. auf einer Geraden durch den Nullpunkt $(0|0)$.

Indirekte Proportionalität (in Zeichen: $y \sim \frac{1}{x}$)
Beispiel: Ein Busunternehmer rechnet für den Tagesausflug, den er anbietet, mit Personal- und Benzinkosten von 240 Euro. Wie viele Personen müssen sich, damit diese Kosten gedeckt sind, für die Fahrt anmelden, wenn der Reisepreis 10 (20, 30, 40) Euro beträgt?
Jedem Reisepreis x ist die benötigte Personenzahl y zugeordnet:



Preis x in Euro	10	20	30	40
Benötigte Personenzahl y	24	12	8	6

Die Personenzahl y kann berechnet werden mit $y = \frac{240}{x}$.
Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto y = \frac{240}{x}$.
Eigenschaften:

- Dem 2-fachen (3-fachen) x-Wert ist der $\frac{1}{2}$-fache ($\frac{1}{3}$-fache) y-Wert zugeordnet.
- Produktgleichheit: Die Produkte aus x-Wert und zugeordnetem y-Wert ergeben stets den gleichen Wert (im Beispiel: $x \cdot y = 10 \cdot 24 = 20 \cdot 12 = \ldots = 240$).
- Die Zuordnungsvorschrift ist von der Form $x \mapsto y = \frac{m}{x}$.
- Die Punkte im Schaubild liegen auf einer Hyperbel.

Jede dieser Eigenschaften eignet sich zum **Lösen von Aufgaben**, außerdem die Schlussrechnung (Dreisatz, $\rightarrow$ grund59.pdf). Beispiel:
Ein Fuhrunternehmen soll 180 m^3 Erde abtransportieren. Mit 20 Fuhren hat er schon 120 m^3 Erde abgefahren. Wie viele Fuhren sind insgesamt erforderlich?
Es handelt sich hier um eine direkte Proportionalität (bei doppelt so viel Erde braucht man doppelt so viele Fuhren): Abgefahrene Erde x in m^3 $\mapsto$ Zahl der Fuhren y.
Lösungsmöglichkeiten (weitere siehe ueb83.pdf):

- Durch Vergleich der x-Werte:

		$\xrightarrow{\cdot 1{,}5}$	
x in m^3	120		180
y	20		...
		$\xrightarrow{\cdot 1{,}5}$	also ... = 30

- Durch Aufstellen der Gleichung der Form $y = mx$. Dabei ist mit $x = 120$ und $y = 20$: $20 = m \cdot 120$, also $m = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ (siehe unten). Mit $y = \frac{1}{6}x$ berechnet man nun für $x = 180$: $y = \frac{1}{6} \cdot 180 = 30$.
  (Proportionalitätsfaktor anschaulich: $\frac{1}{6}$ Fuhre pro m^3)
- Mit Quotientengleichheit: $\frac{20}{120} = \frac{\ldots}{180}$, also $\ldots = \frac{20}{120} \cdot 180 = 30$ („20 verhält sich zu 120 so wie … zu 180“).

8. Klasse TOP 10 Grundwissen	8
Lineare Ungleichungen, Potenzgesetze	**04**

Ungleichungen

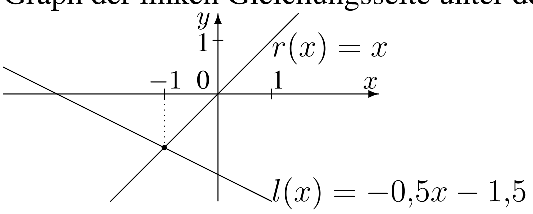
Es gelten die gleichen Regeln wie beim Lösen von Gleichungen, mit folgender Besonderheit: Multipliziert/dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so muss das Ungleichungszeichen umgekehrt werden.

Beispiel:
$$\begin{array}{rcll} -11x+3 & < & 7 & \mid -3 \\ -11x & < & 4 & \mid :(-11) \quad (!) \\ x & > & -\frac{4}{11} & \qquad L =]-\frac{4}{11};\infty[\end{array}$$

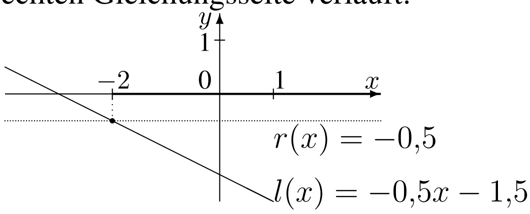
Die Lösungsmengen sind Intervalle; man schreibt die kleinere Grenze links, die größere rechts; ist die Klammer auswärts gerichtet, so gehört die jeweilige Grenze nicht mehr zum angegebenen Bereich; dagegen z. B. bei $]-\infty;1]$ gehört die rechte Grenze 1 noch zum Intervall dazu. Bei $\pm\infty$ (unendlich) ist die Klammer stets auswärts gerichtet.
Schreibweise auch: $\{x|x > -\frac{4}{11}\}$ bzw. $\{x|x \leq 1\}$ (Menge aller x mit der Eigenschaft ...).

Graphisches Lösen von (Un-)Gleichungen

Beispiel: Die Gleichung $-0{,}5x - 1{,}5 = x$ bzw. Ungleichung $-0{,}5x - 1{,}5 < -0{,}5$ soll graphisch gelöst werden. Man zeichnet zu linker und rechter Gleichungsseite die Funktionsgraphen und sucht im Koordinatensystem diejenigen x-Werte, für die die Graphen gleiche bzw. hier kleinere y-Werte liefern, d. h. die Schnittpunkte bzw. den Bereich, in dem hier der Graph der linken Gleichungsseite unter dem der rechten Gleichungsseite verläuft:



$l(x) = r(x)$ hat die Lösung $x = -1$



$l(x) < r(x)$ hat die Lösung $x > -2$

Potenzgesetze ($\rightarrow$ grund51.pdf, grund52.pdf, grund64.pdf)

Bedeutung: $a^6 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{6 Stück gleiche Faktoren}}$, ferner $a^0 = 1$.

Negative Exponenten sagen: „Ich stehe im Nenner“: $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, z. B. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Auch für Einheiten und Variablen, z. B. $\mathrm{ms}^{-1} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Bei negativen Exponenten tauschen Zähler und Nenner, z. B. $\frac{a^3}{2b^{-4}} = \frac{a^3b^4}{2}$, $(\frac{x}{2})^{-2} = (\frac{2}{x})^2$

Rechenregeln:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Beispiel: $x^2 \cdot x^4 = x^6$

  $a^x : a^y = a^{x-y}$. Beispiel: $\frac{a^5}{a^2} = a^5 \cdot a^{-2} = a^3$
- $(ab)^x = a^x b^x$. Beispiel: $(2x)^{-3} = 2^{-3}x^{-3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^3}$

  $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$. Beispiel: $(\frac{x}{3})^{-4} = \frac{x^{-4}}{3^{-4}} = \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{3^4}} = \frac{3^4}{x^4} = \frac{81}{x^4} = 81x^{-4}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ („Potenzen potenzieren heißt Exponenten multiplizieren“).
  Beispiel: $(3^5)^{-2} = 3^{5\cdot(-2)} = 3^{-10}$

Zehnerpotenzen (zur Angabe sehr kleiner Zahlen):

Beispiele: $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000}$; $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ m $= 3{,}5 \cdot \frac{1}{10^6}$ m $= 0{,}000\,003\,5$ m $= 3{,}5\ \mu$m

Manche Taschenrechner (TR) zeigen Zehnerpotenzen im Display z. B. so an: $\boxed{3{,}5^{-06}}$; dies muss aber mit „10 hoch“ auf das Papier geschrieben werden: $3{,}5 \cdot 10^{-6}$

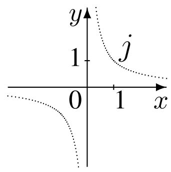
Umgekehrt: Eingabe einer Zehnerpotenz mit dem TR: Meist $\times 10^x$, Exp- oder EE-Taste.

Beispiel: $10^{-12} = 1 \cdot 10^{-12}$: Tippe (je nach TR) 1 $\boxed{\times 10^x}$ $\boxed{(-)}$ 12 bzw. 1 $\boxed{\text{Exp}}$ 12 $\boxed{+/-}$

Je nach TR kann man die Anzeige von Zehnerpotenzen mit gewissen Tastenkombinationen ändern, z. B. ENG.

8. Klasse TOP 10 Grundwissen	8
Gebrochen-rationale Funktionen	**05**

Grundform $j(x) = \frac{1}{x}$: Der Graph ist eine Hyperbel:



Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2x-2} + 1{,}5$$

Umformung und Definitionsbereich:
$f(x) = \frac{1}{2x+2} + 1{,}5 = \frac{1}{2(x-1)} + 1{,}5 = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + 1{,}5 = \frac{0{,}5}{x-1} + 1{,}5$ (→ grund86.pdf).
Da man nicht durch 0 dividieren darf, der Nenner unten also nicht 0 sein darf, ist $2x - 2 = 0$ verboten, also $2x = 2$, also $x = 1$ verboten. Erlaubt sind also alle Zahlen[1] ohne die 1:

$$D = \mathbb{Q}\backslash\{1\}$$

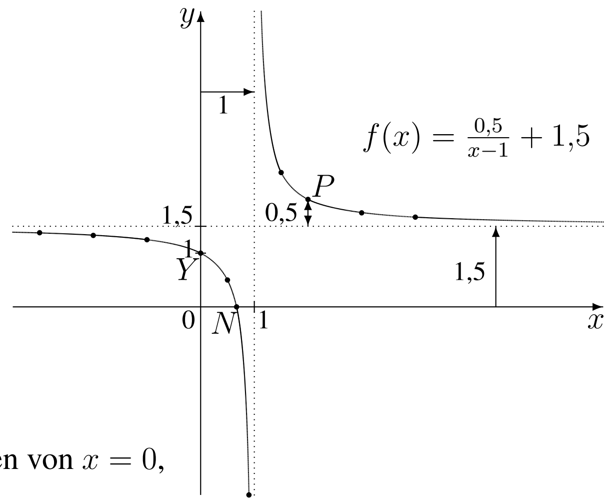
Wertetabelle (mit Taschenrechner, hier gerundete Werte):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1,38	1,33	1,25	1	$\lightning$	2	1,75	1,67

Besonders interessant sind Werte nahe der verbotenen 1 sowie sehr große x-Werte:

x	-100	0,5	0,9	1,01	1,1	1,5	100	1000
y	1,495	0,5	$-3{,}5$	51,5	6,5	2,5	1,505	1,501

Bedeutung der Zahlen a, b, c in $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, hier $a = 0{,}5$, $b = -1$, $c = 1{,}5$ in Hinblick auf den Graphen und besondere Punkte (→ grund81.pdf):



Waagrechte Asymptote $y = 1{,}5$:
Bei sehr großen x-Werten nähert sich der y-Wert immer mehr dem Wert $c = 1{,}5$, d. h. der Graph nähert sich der waagrechten Geraden auf Höhe 1,5.

Senkrechte Asymptote (Pol):
In der Nähe der verbotenen Stelle $x = -b = 1$ schmiegt sich der Graph (wegen der betragsmäßig sehr großen y-Werte) an die senkrechte Gerade $x = 1$ an.

Schnittpunkt mit der y-Achse: Einsetzen von $x = 0$, hier: $f(0) = \frac{0{,}5}{0-1} + 1{,}5 = 1$, also $Y(0|1)$.

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen): Funktionsterm gleich 0 setzen und sich ergebende Bruchgleichung lösen (→ grund87.pdf); hier: $\frac{0{,}5}{x-1} + 1{,}5 = 0 \qquad | - 1{,}5$
$\frac{0{,}5}{x-1} = -1{,}5 \qquad | \cdot (x-1)$
$0{,}5 = -1{,}5(x-1)$, also $0{,}5 = -1{,}5x + 1{,}5$, also $-1 = -1{,}5x$, somit $x = \frac{2}{3}$, also $N(\frac{2}{3}|0)$.

Angenehm für die Berechnung von y ist der x-Wert eine Einheit rechts der Definitionslücke, hier also $x = 2$: $f(2) = \frac{0{,}5}{2-1} + 1{,}5 = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$, also $P(2|2)$. Damit ergibt sich:

$a = 0{,}5$: Der Graph ist im Vergleich zur Grundfunktion j mit Faktor $0{,}5$ in y-Richtung gestreckt (bei negativem a zusätzlich an der x-Achse gespiegelt).
$b = 1$: Der Graph ist dann um b nach links (hier also um 1 nach rechts) verschoben.
$c = 1{,}5$: Der Graph ist im Vergleich zu j dann um $c = 1{,}5$ nach oben verschoben.

[1] Alle Zahlen, die wir kennen, also in der 8. Klasse rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, ab der 9. Klasse reelle Zahlen $\mathbb{R}$.

8. Klasse TOP 10 Grundwissen — 8
Rechnen mit Bruchtermen — 06

- **Faktorisiere den Nenner**, d. h. schreibe ihn durch Ausklammern als Produkt.

  Beispiele: $\frac{6x-4}{5x^2-ax} = \frac{6x-4}{x(5x-a)}$ $\qquad \frac{ab}{6a-4b} = \frac{ab}{2(3a-2b)}$

  Tipp: Einen faktorisierten Nenner nicht ausmultiplizieren, wenn es nicht nötig ist![2]

- **Definitionsmenge**: Der Nenner darf nicht 0 werden. In obigen Beispielen ist also zu fordern:[3] $x \neq 0, x \neq \frac{a}{5}$ bzw. $3a - 2b \neq 0$, also $a \neq \frac{2}{3}b$

- **Richtiges Kürzen**

  Kürzen darf man nur, wenn in Zähler und Nenner ein Produkt steht. Man muss also zuerst faktorisieren. Beispiel: $\frac{6x-6a}{x^2-ax} = \frac{6(x-a)}{x(x-a)} = \frac{6}{x}$

  Bei Summen und Differenzen darf nicht gekürzt werden, z. B. $\frac{6x+a}{x^2+a}$ oder $\frac{6(x-a)-1}{x-a}$ können nicht vereinfacht werden.

  Ausnahme: Man führt das Ausklammern im Kopf durch und kürzt in jedes Glied der Summe. Beispiele: $\frac{6x-6a}{2x^2} = \frac{3x-3a}{x^2}$ (mit 2 gekürzt); $\frac{5x}{x^2-ax} = \frac{5}{x-a}$ (mit x gekürzt)

- **Addition, Subtraktion**

  Auf gemeinsamen Nenner bringen (vorher faktorisieren), dann auf gemeinsamem Bruchstrich addieren/subtrahieren (Klammern setzen). Beispiel:

  $\frac{x-3}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + 4 = \frac{x-3}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{4}{1} = \ldots$

  (hier wurde zuerst faktorisiert; Hauptnenner ist nun $2(x-1)(x+1)$, der erste Bruch wird erweitert mit $(x+1)$, usw.:)

  $$\ldots = \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} + \frac{4\cdot 2(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x-3x-3-\overbrace{(x^2-x-x+1)}^{\text{Klammern setzen!}}+8(x^2+x-x-1)}{2(x-1)(x+1)} =$$

  $$= \frac{x^2-2x-3-x^2+2x-1+8x^2-8}{2(x-1)(x+1)} = \frac{8x^2-12}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4x^2-6}{(x-1)(x+1)}$$

- **Multiplikation, Division**: Wie gewohnt (wie bei normalen Brüchen → grund61.pdf).

  Beispiel: $\frac{2}{(x+1)(x-1)} : \frac{10}{3x-3} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{3x-3}{10} = \frac{2\cdot 3(x-1)}{(x+1)(x-1)\cdot 10} = \frac{3}{5(x+1)}$

- **Doppelbrüche** als Quotienten schreiben. Beispiel:

  $$\frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m}{s} : \frac{m}{s^2} = \frac{m}{s} \cdot \frac{s^2}{m} = \frac{ms^2}{sm} = \frac{s}{1} = s$$

  Meist lässt man den ersten Zwischenschritt weg und schreibt gleich direkt den Nenner des Nenners (hier s^2) in den Zähler.

- **Vorzeichen**

  Auf Minusklammern achten (besonders beim Subtrahieren, siehe oben)!

  Eventuell kann man in Zähler und Nenner (-1) ausklammern und kürzen. Beispiel: $\frac{-x-1}{-x-7} = \frac{-(x+1)}{-(x+7)} = \frac{x+1}{x+7}$ („Minus durch minus ist plus“)

  Ein ausgeklammertes Minus des Zählers oder Nenners darf man auch vor den Bruch schreiben. Beispiel: $\frac{x}{-x-1} = \frac{x}{-(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$ („Plus durch minus ist minus“)

  (-1)-Trick: Will man (z. B. um kürzen zu können) eine Differenz „umdrehen“, so erreicht man dies durch Ausklammern von (-1). Beispiel: $7 - x = -(-7 + x) = -(x-7)$, also $\frac{7-x}{2x-14} = \frac{-(x-7)}{2(x-7)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

---

[2] Denn z. B. bei $(x-2)(x+7)$ sieht man Definitionsmenge usw. viel leichter als bei $x^2 + 5x - 14$.

[3] Eventuell empfiehlt es sich, in einer Nebenrechnung (NR) den Klammerausdruck gleich 0 zu setzen. Im ersten Beispiel: NR: $5x - a = 0$; $5x = a$; $x = \frac{a}{5}$.

8. Klasse TOP 10 Grundwissen — 8
Bruchgleichungen, Formeln auflösen — 07

Bruchgleichungen sind solche Gleichungen, in denen x unten im Nenner vorkommt.
Bruchgleichungen löst man, indem man mit dem Hauptnenner (HN) multipliziert.
Beispiel:

$$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{x+2} \qquad | \cdot HN$$

Betrachte Nenner: $x-1$, $x+2$
Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{1; -2\}$
($\mathbb{Q}$ ohne $\{1; -2\}$; 1 und -2 sind verboten, da sonst der Nenner 0 wird).

$$HN = (x-1)(x+2)$$

Bei der Multiplikation mit dem HN wird gleich $x-1$ beim Bruch auf der linken Seite und $x+2$ auf der rechten Seite gekürzt; nicht vergessen, die -1 mit HN zu multiplizieren!

$$x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3(x-1)$$

Diese Gleichung löst man wie gewohnt. Rechne nach: $x = \frac{5}{2}$
Blick zurück auf die Definitionsmenge: $\frac{5}{2}$ ist nicht verboten, also $L = \{\frac{5}{2}\}$

Beachte:

- **Nenner faktorisieren:** Ausklammern, dann erst HN bestimmen.
- **Kreuzweise Multiplizieren**
  Steht links und rechts des Gleichheitszeichens jeweils nur **ein** Bruch (nur dann!), dann wird der linke Nenner auf die rechte Seite und der rechte Nenner auf die linke Seite „hinübermultipliziert“. (Diese Methode kann man allgemein anwenden, wenn man zuerst linke und rechte Seite jeweils auf **einen** Bruchstrich bringt [→ grund86.pdf].)

  Beispiel:

  $$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} &= \frac{2}{x+1} \\ 3(x+1) &= 2(x-1) \end{aligned}$$

- Bruchgleichungen entstehen oft bei der Suche nach Schnittpunkten und Nullstellen bei gebrochen-rationalen Funktionen (→ grund85.pdf, ueb87.pdf).

Auflösen von Formeln

Multipliziere, wenn Brüche vorkommen, beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner.
Multipliziere Klammern aus.
Bringe bei linearen Gleichungen (d. h. die gesuchte Größe kommt nicht im Nenner vor und nicht quadratisch [„hoch 2“] oder ähnlich) alle Stücke mit der gesuchten Variablen auf eine und den Rest auf die andere Seite (durch Addition/Subtraktion/siehe auch grund76.pdf).
Klammere die gesuchte Variable aus und bringe den Klammerausdruck durch Division auf die andere Seite.
Beispiel: Löse nach R_1 auf:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad | \cdot RR_1R_2$$

Mit dem Hauptnenner RR_1R_2 beide Seiten der Gleichung multiplizieren:

$$\begin{aligned} R_1R_2 &= RR_2 + RR_1 && | - RR_1 \\ R_1R_2 - RR_1 &= RR_2 \\ R_1(R_2 - R) &= RR_2 && | : (R_2 - R) \\ R_1 &= \frac{RR_2}{R_2 - R} \end{aligned}$$

8. Klasse TOP 10 Grundwissen	8
Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente	08

Zufallsexperimente lassen sich beschreiben durch Aufzählen aller möglichen Versuchsausgänge (**Ergebnisse**). Diese bilden den **Grundraum** Ω.
Beispiel: Herr A und Frau B betreten im Untergeschoß eines Kaufhauses den Aufzug und wählen ihr Ziel (Erdgeschoß, 1., 2. oder 3. Stock). Das Ergebnis „Herr A möchte in den 2. Stock, Frau B ins Erdgeschoß“ könnte notiert werden als $(2,0)$ oder als 20; der Grundraum ist

$$\Omega = \{00, 01, 02, 03,\\ 10, 11, 12, 13,\\ 20, 21, 22, 23,\\ 30, 31, 32, 33\}.$$

Anzahl der Elemente von Ω: $|\Omega| = 16$.
Ereignisse sind Teilmengen von Ω.
In obiger Situation z. B.
$E_1 =$ „Herr A möchte in den 2. Stock, Frau B ins Erdgeschoß“ $= \{20\}$
$E_2 =$ „Herr A möchte in den 2. Stock“ $= \{20, 21, 22, 23\}$
$E_3 =$ „ Herr A und Frau B möchten ins gleiche Stockwerk“ $= \{00, 11, 22, 33\}$
$E_4 =$ „Herr A steigt vor Frau B aus“ $= \{01, 02, 03, 12, 13, 23\}$
Gegenereignis „nicht E“, Schreibweise $\overline{E}$,
z. B. $\overline{E_4} =$ „Herr A steigt nicht vor Frau B aus, d. h. A nach B oder A und B im gleichen Stockwerk“ $= \{00, 10, 11, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33\}$
Unmögliches Ereignis: Leere Menge $\{\}$, z. B. $E_3 \cap E_4$ (Schnittmenge: Beides, E_3 und E_4)
Sicheres Ereignis: Ganz Ω, z. B. „Die Summe der beiden Stockwerksnummern ist < 10“
Elementarereignis: Einelementige Teilmenge (besteht nur aus einem Ergebnis), z. B. E_1

Wahrscheinlichkeiten
Für jedes Ereignis gibt man den Grad der Sicherheit an, mit dem man das Eintreten des Ereignisses erwarten kann: Zu jedem Ereignis E hat man eine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ zwischen 0 und 100 % = 1.
Bei **Laplace-Experimenten** sind alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich: Es ist dann

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Betrachtet man obige Situation als Laplace-Experiment (was aber zu hinterfragen ist!), so ist
z. B. $P(E_1) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\ \%$ $\quad P(E_3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$
$P(E_4) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$ $\quad P(\overline{E_4}) = \frac{10}{16} = 0{,}625 = 62{,}5\ \% = 1 - P(E_4)$
Allgemein ist $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.
Zum **Zählen der Elemente** von E bzw. Ω eignet sich ein Baumdiagramm oder das **Zählprinzip** (→ grund57.pdf).
In obiger Situation ist z. B. $|\Omega| = 4 \cdot 4$ (4 Wahlmöglichkeiten für Herrn A, 4 für Frau B), $|E_3| = 4 \cdot 1$ (4 Mögl. für A, dann nur noch 1 für B, da sie das gleiche wie A wählen muss).
Weiteres Beispiel: Mit fünf geworfenen Würfeln soll die „große Straße“ 23456 (Ereignis E) gebildet werden. Hier ist $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$, $|E| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (5 Mögl. für den ersten Wurf, dann noch 4 für den zweiten usw.), also $P(E) = \frac{5!}{6^5} \approx 1{,}5\ \%$.
Gesetz der großen Zahlen: Bei mehrmaliger unabhängiger Durchführung eines Experiments kann die relative Häufigkeit (→ grund62.pdf), in wie viel % der Fälle das jeweilige Ereignis eingetreten ist, durchaus schwanken, sie wird sich jedoch auf die Dauer um einen festen Wert stabilisieren, da eventuelle Glücks- oder Pechsträhnen bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen nicht mehr ins Gewicht fallen.

8. Klasse TOP 10 Grundwissen — 8
Lineare Gleichungssysteme — 09

Beispiel:

$$\begin{array}{rcll} 2x - 3y &=& 7 & \text{(I)} \\ 4x + 5y &=& -8 & \text{(II)} \end{array}$$

Einsetzverfahren

Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf und setze in die andere Gleichung ein:

I nach x aufgelöst: $x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}y$ (I')

In II eingesetzt: $4 \cdot (\frac{7}{2} + \frac{3}{2}y) + 5y = -8$

Jetzt hat man eine Gleichung, die nur noch y enthält (x ist eliminiert worden); löse diese Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} 14 + 6y + 5y &=& -8 \\ y &=& -2 \end{array}$$

Berechne die andere Unbekannte durch Einsetzen in I':

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-2) = \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge enthält genau ein Zahlenpaar als Lösung:

$$L = \{(\tfrac{1}{2}; -2)\}$$

Additionsverfahren

Schreibe die Gleichungen ordentlich untereinander und multipliziere jede Gleichung so, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden; anschließend werden beide Seiten der Gleichungen addiert. Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl|l} \text{I} & 2x - 3y &=& 7 & \cdot 5 \\ \text{II} & 4x + 5y &=& -8 & \cdot 3 \\ \hline \text{I'} & 10x - 15y &=& 35 & \\ \text{II'} & 12x + 15y &=& -24 & \\ \hline \text{I'+II'} & 22x &=& 11 & \\ & x &=& \frac{1}{2} & \end{array}$$

Jetzt Gegenzahlen $-15/+15$!
Diesen Zwischenschritt schreibt man in der Regel nicht hin, sondern addiert gleich beide Seiten der Gleichungen im Kopf ($5 \cdot 2x + 3 \cdot 4x = 22x$ usw.).

Die andere Unbekannte y berechnet man durch Einsetzen in I oder II:

$$\begin{array}{lrcl} \text{in I:} & 2 \cdot \frac{1}{2} - 3y &=& 7 \\ & y &=& -2 \\ & L &=& \{(\frac{1}{2}; -2)\} \end{array}$$

Man hat jeweils Wahlmöglichkeiten, welche Variable man eliminiert; wähle geschickt!

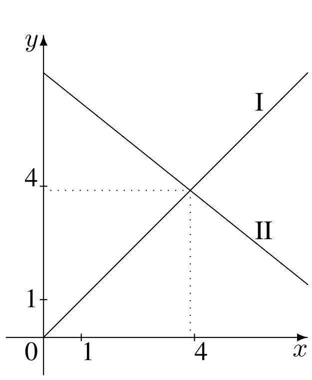
Spezialfälle

In Ausnahmefällen kann sich ein Widerspruch von der Sorte $0 = 1$ ergeben (dann ist $L = \{\}$) oder eine allgemeingültige Gleichung der Sorte $0 = 0$ (dann hat man eigentlich nur eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen).

Graphisches Lösungsverfahren

Jede Gleichung wird nach derselben Variablen aufgelöst; die sich dadurch ergebende lineare Funktion wird im Koordinatensystem als Gerade dargestellt; gemeinsame Punkte stellen die gesuchte „simultane“ Lösung dar.
Beispiel: Autofahrt einer Mutter (erfahren mit 1 $\frac{\text{km}}{\text{min}}$) mit ihrer Tochter (Führerscheinneuling mit 0,8 $\frac{\text{km}}{\text{min}}$). Die Tochter soll gleich lange wie die Mutter fahren. Sie wollen eine Strecke von insgesamt 7 km zurücklegen. Wie lange darf die Tochter/die Mutter am Steuer sitzen?
Sei x die Fahrzeit der Tochter in min, y die der Mutter.

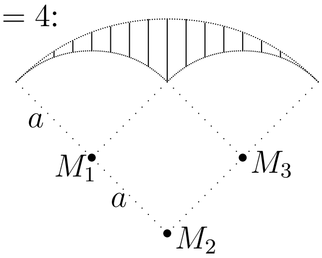
I. $x = y$
II. $0{,}8 \cdot x + 1 \cdot y = 7$
Aufgelöst nach y: I. $y = x$
II. $y = 7 - 0{,}8x$



Der Grafik entnimmt man den Schnittpunkt mit $x \approx 3{,}9$, $y \approx 3{,}9$. Tochter und Mutter dürfen je ca. 3,9 min am Steuer sitzen.
Vorteil des graphischen Verfahrens: Man kann weitere Punkte relativ leicht interpretieren; z. B. $(5|3)$ bedeutet, dass zwar 7 km zurückgelegt werden, aber die Tochter würde länger als die Mutter fahren; bei $(5|5)$ würden Mutter und Tochter gleich lange am Steuer sitzen, aber es würden mehr als 7 km zurückgelegt werden.

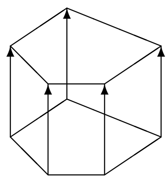
8. Klasse TOP 10 Grundwissen	8
Kreis, Prisma, Zylinder	**10**

Kreismessung
Mit der Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$ (für Überschlagsrechnungen $\pi \approx 3$) berechnet man für einen Kreis mit Radius r ($= \frac{d}{2}$ = halber Durchmesser):
Kreisumfang $u = 2r\pi$
Kreisfläche $A = r^2\pi$
Insbesondere gilt also: Bei doppeltem Radius r ist der Umfang u doppelt (Proportionalität), bei 2-fachem r ist die Fläche A 4-fach (quadratischer Zusammenhang).
Hat man Teile von Kreisen (z. B. Viertelkreis), nimmt man den entsprechenden Bruchteil.
Beispiel: Umfang u und Fläche A der nebenstehenden Figur für $a = 4$:
Die Figur besteht aus einem Viertelkreis um M_2 mit Radius $R = 2a$ und zwei Viertelkreisbögen um M_1, M_3 mit $r = a$.



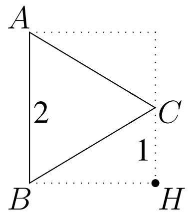
$u = \frac{1}{4} \cdot 2R\pi + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2r\pi = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2a\pi + a\pi = 2a\pi = 8\pi \approx 25{,}13.$
$A = \frac{1}{4}R^2\pi - 2 \cdot \frac{1}{4}r^2\pi - a^2 = \frac{1}{4}(2a)^2\pi - \frac{1}{2}a^2\pi - a^2 =$
$= \frac{1}{4} \cdot 4a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\pi - a^2 = \frac{1}{2}a^2\pi - a^2 = 8\pi - 16 \approx 9{,}13$

Prisma, Zylinder
Verschiebt man eine n-eckige Grundfläche nach oben, so erhält man ein Prisma; es wird begrenzt von den n-Ecken als Grund- und Deckfläche und den Rechtecken, die den Mantel des Prismas bilden.



Bei Verschiebung eines Kreises nach oben entsteht ein Zylinder.

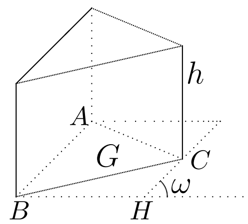
Schrägbild
Die nach „hinten“ laufenden Linien werden unter einem Winkel ω (z. B. $\omega = 45°$) und mit Faktor q verkürzt (z. B. $q = 0{,}7$) dargestellt. Nützlich sind hierzu oft Hilfspunkte oder ein „Einsperren“ in ein Rechteck.
Ist z. B. der Grundriss eines Primas das nebenstehende gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 2, so kann man mit dem Hilfspunkt H die Lage des Punktes C im Schrägbild in einer Entfernung von $1 \cdot q$ vom Punkt H konstruieren.



Netz
(„Bastelanleitung“)
Hilfreich ist hier oft, sich den Körper „aufgeklappt“ oder „abgewickelt“ zu denken.

Aus Platzgründen ist das Netz hier jeweils verkleinert dargestellt.

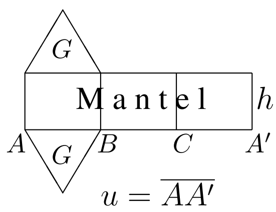
Prisma



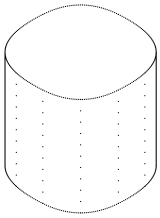
Volumen:
Grundfläche · Höhe
$V = Gh$

Mantelfläche:
$M = uh$
(u = Umfang der Grundfläche)

Oberfläche:
$O = M + 2G$



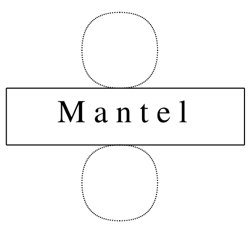
Zylinder



Volumen:
Grundfläche · Höhe
$V = r^2\pi h$

Mantelfläche:
$M = uh = 2\pi rh$

Oberfläche:
$O = M + 2G =$
$= 2\pi rh + 2r^2\pi$



8. Klasse TOP 10 Grundwissen — 08

Kernsätze — K

Blatt auf DIN A 3 vergrößern, Karteikarten ausschneiden und Rückseite an Rückseite zusammenkleben!

Funktionen verstehen 81

Wie kann man Funktionsgraphen immer zeichnen?
Wie berechnet man Nullstellen?
Wie berechnet man den Schnittpunkt zweier Funktionen?

Lineare Funktionen 82

Wie zeichnet man den Graphen einer linearen Funktion mit dem Term $y = mx + t$?
Beispiel: $y = -\frac{3}{2}x + 4$

Proportionalität 83

Nenne vier Kennzeichen einer direkten Proportionalität!

Ungleichung, Potenz 84

Was muss man beim Mult./Div. einer Ungleichung beachten?
Was besagt der negative Exponent: a^{-n}?
Rechenregeln: $r^a \cdot r^b =?$,
$(x^{-3})^{-1} =?$

Gebrochen-rationale Funktionen 85

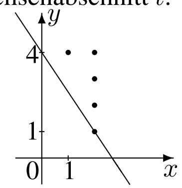
Beispiel: $f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$
Welche Bedetung haben die Zahlen $a = 2$, $b = 1$ und $c = 3$ in diesem Beispiel?

L81

Wertetabelle geht immer.
Nullstellen: Funktionsterm = 0.
Schnittpunkte: Gleichsetzen, Gleichung lösen, y-Wert durch Einsetzen in einen der beiden Terme.

L82

Steigung m (1 nach rechts, m nach oben), y-Achsenabschnitt t.
$y = -\frac{3}{2}x + 4$
hat Steigung $-\frac{3}{2}$
(fallend,
2 nach rechts,
3 nach unten)



L83

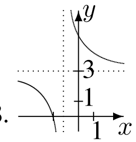
Verdoppelt/ver-k-facht man die eine Größe, dann verdoppelt/ver-k-facht sich auch die andere Größe;
Ursprungsgerade;
Quotientengleichheit;
Formel von der Bauart $y = mx$.

L84

Beim Multiplizieren/Dividieren einer Ungleichung mit einer negativen Zahl muss man das Ungleichungszeichen umdrehen.
Negativer Exponent: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$r^a \cdot r^b = r^{a+b}$,
$(x^{-3})^{-1} = x^{(-3)\cdot(-1)} = x^3$

L85

a: Streckung in y-Richtung
b: Verschiebung nach links, senkrechte Asymptote, hier an Definitionslücke $x = -1$.
c: Verschiebung nach oben: Waagrechte Asymptote, hier $y = 3$.



Rechnen mit Bruchtermen 86

Warum braucht man eine Definitionsmenge? (Beispiel: $\frac{1}{2x+1}$).
Wann darf man kürzen?
Wie addiert/subtrahiert man?
(Beispiel: $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$).
Wie multipliziert/dividiert man?

Bruchgleichungen 87

Wie löst man Bruchgleichungen?
Beispiel: $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{x}$
$(D = \mathbb{Q}\backslash\{0; 1\})$

Wahrscheinlichkeit 88

Wie berechnet man in Laplace-Experimenten Wahrscheinlichkeiten?

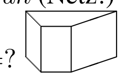
Lineare Gleichungssysteme 89

Wie funktioniert das Einsetz- bzw. Additionsverfahren?
Beispiel:

$$\begin{array}{ll} I & 3x - 2y = 0 \\ II & 5x + 3y = 38 \end{array}$$

Kreis, Prisma, Zylinder 810

Kreisumfang $u =?$
Kreisfläche $A =?$
Erkläre $O_{\text{Prisma}} = 2G + uh$ (Netz!)
Volumen $V_{\text{Prisma}} =?$
Oberfläche $O_{\text{Zylinder}} =?$
Volumen $V_{\text{Zylinder}} =?$



L86

Der Nenner darf nicht 0 werden (Beispiel: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$).
Kürzen nur bei Produkten, nicht bei Summen!
Add./subtr. mit gemeins. Nenner ($\frac{x}{(x+2)x} - \frac{x+2}{(x+2)x} = -\frac{2}{(x+2)x}$).
Mult./div. wie in der 6. Klasse!

L87

Bruchgleichungen löst man, indem man mit dem Hauptnenner multipliziert (oder kreuzweise, wenn li. und re. nur **ein** Bruch).
Beispiel: $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{x} \quad | \cdot x(x-1)$
$x^2 - x(x-1) = 3(x-1)$
$x = 3x - 3$; $x = 1{,}5$; $L = \{1{,}5\}$

L88

Bilde Grundraum Ω, zähle alle Ergebnisse von Ω (oft Zählprinzip!), ebenso die für das gesuchte Ereignis E günstigen Ergebnisse.
$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} =$
$= \frac{\text{Zahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Zahl aller möglichen Ergebnisse}}$

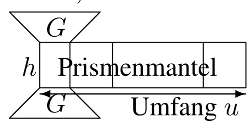
L89

Einsetzverfahren: Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die andere einsetzen.
Additionsverfahren: Beispiel:

$$\begin{array}{lll} I & 3x - 2y = 0 & | \cdot 3 \\ II & 5x + 3y = 38 & | \cdot 2 \\ \hline & 19x \quad = 76; & x = 4;\ y = 6 \end{array}$$

L810

Kreis: $u = 2r\pi$, $A = r^2\pi$.
Prisma:



V_{Prisma} = Grundfläche mal Höhe
$O_{\text{Zylinder}} = 2r^2\pi + 2r\pi h$
$V_{\text{Zylinder}} = r^2\pi h$

8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Funktionen verstehen	**01**

1. (a) Wie ändert sich die Wertetabelle, wie der Funktionsgraph, wenn man anstelle der Funktion $y = x^2$ die Funktion $y = x^2 + 3$ betrachtet?

   Warum kann man auch ohne Zeichnung etwas über die Symmetrie der Funktionsgraphen sagen?

   (b) Wie ändert sich die Wertetabelle, wie der Funktionsgraph, wenn man anstelle der Funktion $y = x^2$ die Funktion $y = 3x^2$ betrachtet?

2. Eine Fahrradverleih erwägt die Anschaffung eines Mountain-Bikes zu 1800 Euro, muss dabei pro Jahr einen Wertverlust von 200 Euro kalkulieren, oder eines Cityrads zu 800 Euro bei 70 Euro jährlichem Wertverlust. Welche anschauliche Bedeutung hat dann der Schnittpunkt der durch $y = -200x + 1800$ und $y = -70x + 800$ gegebenen Funktionen? Berechne diesen. Überzeuge dich bei der Berechnung des y-Werts davon, dass beide Funktionsterme das gleiche Ergebnis liefern.

3. Bearbeite für $y = -0{,}5x + 2$: Wertetabelle, Funktionsgraph, Schnittpunkte mit x- und y-Achse, Punkte auf dem Graphen $P(2; ?)$ und $Q(?; 5)$. Gib einen Punkt $R(100; ?)$ an, der unterhalb des Funktionsgraphen liegt!

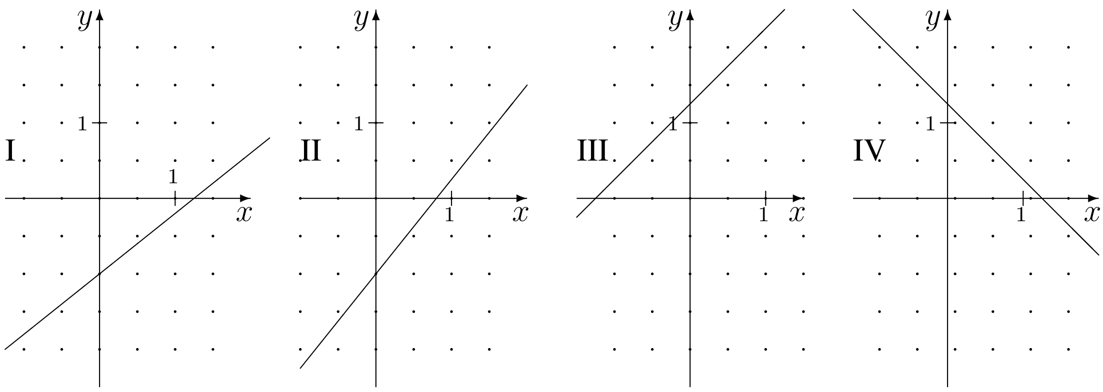
4. Wie könnte man rechnerisch untersuchen, ob sich drei durch die Funktionsgleichungen gegebenen Geraden in einem Punkt schneiden?

5. Wie liegen die durch $y = x^2 + 1$ und $y = -x^2 - 1$ gegebenen Funktionsgraphen zueinander?

6. Finde heraus, welchen Wert der Parameter a im Funktionsterm $f(x) = x^2 - 2x + a$ haben muss, damit der Punkt $P(-3; -4)$ auf dem Funktionsgraphen liegt.

8. Klasse Übungsaufgaben	8
Lineare Funktionen	**02**

1. Gegeben sind die folgenden Funktionsgraphen:



   (a) Welcher der vier Graphen gehört zur Gleichung $y = \frac{5}{4}x - 1$?

   (b) Wie lautet die Gleichung zum Graphen III?

2. (a) Welche Steigung hat die Gerade durch die Punkte $P(0; 3)$ und $Q(2; -3)$? Wie lautet also die Funktionsgleichung?

   (b) Erkläre am Beispiel der Punkte $P(1; 3)$ und $Q(3; -1)$, wie man die Gleichung der Geraden durch diese beiden Punkte aufstellt.

3. Die Gerade $y = -7x$ wird an der x-Achse gespiegelt und anschließend um 3 Einheiten nach unten verschoben. Wie lautet die neue Gleichung?

4. (a) Beschreibe in Worten die Lage der Geraden mit der Gleichung $y = -1$!

   (b) Beschreibe in Worten die Lage der Geraden mit der Gleichung $x + y = -2$!

5. Zeichne die Geraden $y = 3x - 2$ und $y = -\frac{1}{3}x - 1$ in ein Koordinatensystem.

   Bestimme die Nullstellen und den Schnittpunkt.

   Welche Beziehung gilt zwischen den Steigungen dieser senkrecht aufeinander stehenden Geraden?

6. Ein Lieferwagen, der mit 1,2 t beladen ist, transportiert x Säcke zu je 25 kg und y Kisten zu je 150 kg. Stelle den Zusammenhang zwischen x und y in einem Diagramm dar. Welche Punkte $(x; y)$ sind möglich, wenn der Lieferwagen mit *maximal* 1,2 t beladen ist?

8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Proportionalität	**03**

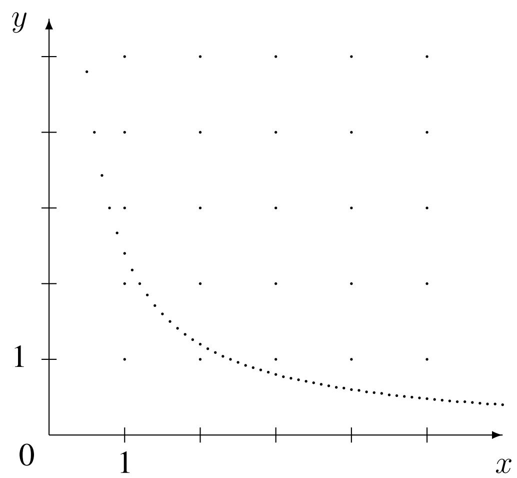
1. Ein Fuhrunternehmen soll 180 m^3 Erde abtransportieren. Mit 20 Fuhren hat er schon 120 m^3 Erde abgefahren. Wie viele Fuhren sind insgesamt erforderlich? Löse diese Aufgabe ($\rightarrow$ grund83.pdf)

   (a) mit Schlussrechnung, (b) mit Hilfe eines Diagramms.

2. Ein Fuhrunternehmer benötigt zum Abfahren der Erde mit 3 Lkws 20 Stunden. Wie lange würe er mit 5 Lkws benötigen? Begründe hierzu, warum und unter welchen Bedingungen es sich um eine indirekte Proportionalität handelt. Diskutiere verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

3. Eine Lehrkraft kauft für 50 Schüler (verschiedener Klassen) einen Bastelmaterial-Vorrat im Wert von 80 Euro. Erstelle eine Wertetabelle, aus der jeweils abgelesen werden kann, wieviel Geld in einer Klasse mit x Schülern insgesamt eingesammelt werden muss. Stelle den Zusammenhang graphisch und mit einer Gleichung dar. Lies aus dem Diagramm ab, wie viel Geld in einer Gruppe von 5 Schülern eingesammelt werden muss. Lies aus dem Diagramm ferner ab, aus wie vielen Schülern eine Gruppe besteht, die insgesamt 12,80 Euro bezahlt hat.

4. Lies aus dem Diagramm drei Werte ab und prüfe, ob es sich um eine indirekte Proportionalität handelt. Stelle gegebenenfalls die Gleichung auf.



5. Auf eine Fähre fahren mehrere Fahrzeuge, darunter 21 Pkws (das sind 84 %), 2 Busse und der Rest Lkws. Um welche Art Proportionalität handelt es sich bei den folgenden Zuordnungen:

   (a) Prozentsatz $\mapsto$ Zahl der Fahrzeuge.

   (b) Zahl der Fahrzeuge $\mapsto$ Prozentsatz

   (c) Prozentsatz $\mapsto$ Winkel in einem Kreisdiagramm

   Stelle die Anzahl der Fahrzeuge in einem Kreisdiagramm dar.

6. Für den Zusammenhang zwischen Masse m, Dichte ρ und Volumen V gilt die Formel $m = \rho \cdot V$. Eine Lehrkraft führt den Schülern gleich schwere Körper verschiedener Dichte vor, und zwar aus Platin ($\rho = 21\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$), Silber ($\rho = 10{,}5\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) und Keramik ($\rho = 2{,}1\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$). Was kann man dann über die Volumina sagen?

8. Klasse Übungsaufgaben	8
Lineare Ungleichungen, Potenzgesetze	**04**

1. Ungleichungen
   (a) Aus der TIMS-Studie (diese war ähnlich wie PISA eine sehr bekannt gewordene internationale Vergleichsuntersuchung):
   Bestimme die Lösungsmenge: $5x + \frac{5}{3} \leq -2x - \frac{2}{3}$
   (b) Löse folgende Ungleichungen und gib die Lösung in Intervallschreibweise an:
   • $-5x \leq 5^{-1}x - 1$
   • $-5x > -2(x+7)$
   (c) Welche Zahl muss auf der rechten Seite der Ungleichung
   $$-x \leq \ldots$$
   stehen, damit die Lösungsmenge $L = [-5; \infty[$ ist?
   (d) Bestimme die Lösungsmenge: $-x > 0$

2. Aus einem Wasserhahn laufen pro Sekunde 7,5 ml Wasser in einen Zahnputzbecher, in dem sich bereits 20 ml befinden.
   (a) Beschreibe, welche Bedeutung der Term $7{,}5x + 20$ hat.
   (b) Bestimme, für welche Zeitdauer nach dem Beginn die Menge Wasser im Becher mindestens 70 ml und höchstens 140 ml beträgt.
   (c) Ein zweiter gereinigter Wasserhahn liefert 9,5 ml pro Sekunde in einen zunächst leeren Becher. Berechne mit einer Ungleichung, für welche Zeitpunkte x die Wassermenge im alten (etwas vorgefüllten) Becher kleiner als die im neuen Becher ist.

3. Potenzen
   (a) Erkläre, wie die Zahlenfolge $(\frac{5}{2})^3$, $(\frac{5}{2})^2$, $(\frac{5}{2})^1$, ... sinnvoll fortzusetzen ist.
   (b) Berechne: $(-5)^{-3} \cdot 5^{15} \cdot (2^3)^4$
   (c) Vereinfache:
   • $c^6 \cdot c^{-8}$
   • $\frac{d^{-3}}{d^{-4}}$
   • $8e^2f^2 + 9^2(ef)^2$
   • $(g^h)^2$
   (d) Erkläre schrittweise mit den Potenzgesetzen die in grund84.pdf angegebene Umformung $(\frac{x}{2})^{-2} = (\frac{2}{x})^2$.
   (e) Vereinfache: $\left(\frac{11x^{-3}}{4y^5}\right)^2 : \left(\frac{2}{y}\right)^{-3}$

4. Berechne die Querschnittsfläche eines 62 μm dicken Haars (nimm dabei der Einfachheit halber an, dass das Haar einen quadratischen Querschnitt hat). Wie viele Haare haben zusammen eine Querschnittsfläche von 1 cm^2? Schreibe das Ergebnis mit Hilfe einer Zehnerpotenz.

8. Klasse Übungsaufgaben	8
Gebrochen-rationale Funktionen	**05**

1. Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle die Graphen zu folgenden Funktionsgleichungen; bestimme waagrechte und senkrechte Asymptote. Gib den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

   (a) $y = \dfrac{-6}{x+3} + 2$ (b) $y = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}$ (c) $y = \dfrac{1{,}25}{x+1{,}5} - 0{,}5$

2. Untersuche die Funktion aus Aufgabe 1(b) rechnerisch auf Schnittpunkte mit der x-Achse.

3. Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{3}{x}$ und bestimme damit die Graphen von $g(x) = -\dfrac{3}{x} - 2$, $h(x) = \dfrac{3}{x+1{,}5}$ und $k(x) = \dfrac{1{,}5}{x}$

4. Bestimme den Definitionsbereich:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-5)}$ (b) $f(x) = \dfrac{7x-3}{8x-5}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} + 7x$

5. Anwendungsbeispiel:

   Ist K_{alt} das Anfangskapital eines Aktienbesitzers und K_{neu} das Endguthaben bei der Rendite („Zinssatz“) x (als Dezimalzahl, also $x = 0{,}03$ bei 3 %), so berechnet man das Endguthaben mit $K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} \cdot (1+x)$. Umgekehrt war also das Anfangsguthaben $K_{\text{alt}} = \dfrac{K_{\text{neu}}}{1+x}$ bzw. als Funktionsterm geschrieben z. B. bei $K_{\text{neu}} = 15000$:

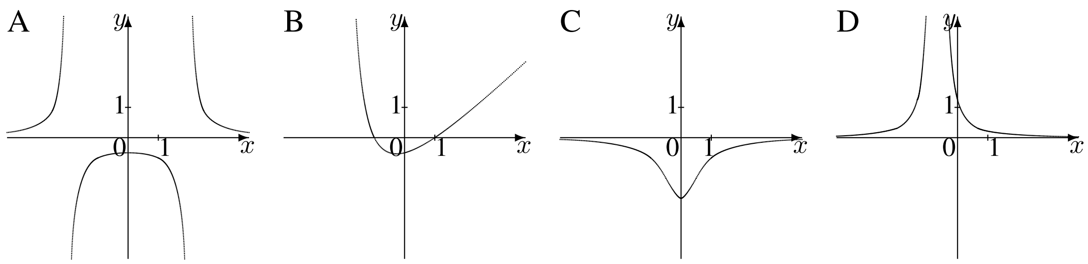
   $$f(x) = \frac{15000}{1+x}$$

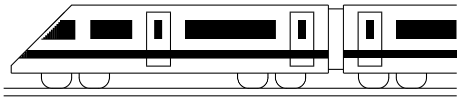
   Berechne, wie viel Geld man somit bei einer Wertsteigerung von 20 % anlegen müsste, um damit 15 000 Euro zu erhalten.

   Erkläre, wie in diesem Beispiel negative x-Werte (z. B. $x = -0{,}8$) interpretiert werden müssten; wie die Definitionslücke?

   Wie wäre (für große x-Werte) die waagrechte Asymptote zu interpretieren?

6. Sonderfälle von Bruchfunktionen, die nicht der elementaren Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ entsprechen: Ordne die Funktionsterme $f(x) = -\dfrac{4}{4x^2+2}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$, $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ und $k(x) = \dfrac{5}{(3x+2)^2}$ den folgenden Graphen zu; begründe kurz (z. B. anhand des Definitionsbereichs [Nenner betrachten!]):





8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Rechnen mit Bruchtermen	**06**

1. Bestimme die Definitionsmenge:

   (a) $\dfrac{5x^2 - a}{36x^2 - 16x}$

   (b) $\dfrac{1}{x-6} - \dfrac{1}{6x+1}$

2. Vereinfache:

   (a) $\dfrac{45x - 20}{36x^2 - 16x}$

   (b) $\dfrac{(ab)^2}{a^3b - a^2b^3}$

3. Bringe auf einen Bruchstrich: $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_1 + R_2}$

4. Vereinfache:

   (a) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$

   (b) $\dfrac{24 - x}{x+3} - 8$

   (c) $\dfrac{6x^2 + 5}{36x^2 - 16x} + \dfrac{3x}{8 - 18x}$

   (d) $\dfrac{6x + 11}{2x + 4} - \dfrac{2x + 5}{x^2 + 2x} - 3$

5. Vereinfache:

   (a) $\dfrac{74x - 34}{x+1} \cdot \dfrac{x^2 + 1}{74x + 34}$

   (b) $\dfrac{az}{z - a} : \dfrac{a^2z^3}{az - a^2}$

6. Vereinfache:

   (a) $\dfrac{\frac{J}{C}}{J}$

   (b) $\dfrac{J}{\frac{J}{C}}$

   (c) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - 2}{1 - \frac{1}{x}}$

8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Bruchgleichungen, Formeln auflösen	**07**

1. Löse folgende Bruchgleichungen:

   (a) $\dfrac{2}{5x+15} = \dfrac{1}{10}$

   (b) $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{3}{x-1}$

   (c) $\dfrac{3x^2}{x-1} - 3x = \dfrac{1}{x-1} + 2$

   (d) $\dfrac{3x^2}{x-1} - 3x = \dfrac{3}{x-1} + 2$

   (e) $\dfrac{5}{2x+6} - \dfrac{1-0{,}25x^2}{x^2+3x} = \dfrac{1}{4}$

2. Zeichne die Graphen zu den Termen $f(x) = \frac{x}{x-2}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x$ in ein Koordinatensystem.

   Bestimme rechnerisch die Nullstelle von f, denjenigen x-Wert mit $f(x) = -3$ und die Schnittpunkte von f und g.

3. Löse folgende Formeln nach den angegebenen Variablen auf:

   (a) $c_1 m_1(\vartheta_1 - \vartheta_m) = c_2 m_2(\vartheta_m - \vartheta_2)$ nach ϑ_m
   Tipps: Führe der Reihe nach folgende Schritte durch:
   (1) Klammern ausmultiplizieren.
   (2) Alle Stücke mit ϑ_m nach rechts, alle anderen nach links.
   (3) ϑ_m ausklammern.
   (4) Die Klammer auf die andere Seite dividieren.

   (b) $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ nach g

   (c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ nach g

   (d) $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ nach f

   (e) $\rho_a V g = mg + \rho_i V g$ nach V

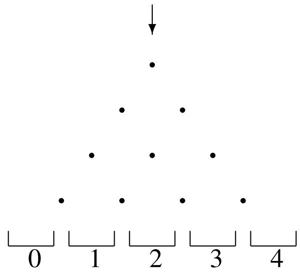
4. Löse nach a auf: $\frac{a}{a-x} = 3$

   Mache die Probe, indem Du das Ergebnis für a einsetzt und vereinfachst.

8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente	**08**

1. Warum ist das Beispiel in grund85.pdf in Wirklichkeit kein Laplace-Experiment?

2. Ein Galton-Brett ist ein vertikal aufgestelltes Brett mit einem Gitter von Nägeln. Die auf den ersten Nagel oben fallende Kugel wird dort nach rechts oder links abgelenkt und trifft dann auf die Nägel der nächsten Reihe. Schließlich fällt sie unten in eines der Fächer. Die Abbildung rechts zeigt ein 4-stufiges Galton-Brett.



   Warum ist zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten die Aufzählung der Fach-Nummern $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ eher ungünstig? Wie muss Ω gewählt werden, damit es ein Laplace-Raum ist? Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in Fach 0 fällt! Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sie in Fach 3 fällt!

3. Ein Rommé-Blatt besteht aus 110 Karten: Herz (rot), Karo (rot), Kreuz (schwarz), Pik (schwarz), jeweils 2, 3, 4, ..., 10, Bube (Wert 10), Dame (10), König (10), As (11), je 2 -mal, dazu 6 Joker (20). Eine Karte wird zufällig gezogen.

   Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A: „Es wird ein As (kein Joker) gezogen“

   B: „Es wird eine rote Karte (kein Joker) gezogen“

   C: „Es wird ein Joker gezogen“

   D: „Es werden h“ochstens 4 Augen gezogen“

   $E = \overline{D}$

   $F = A \cup C$ (Vereinigungsmenge, d. h. A oder C)

   Formuliere E und F in Worten.

4. In der Kantine gibt es als Mittagessen zur Wahl: Apfelstrudel, Brathuhn oder Currywurst. Drei Personen stehen Schlange und nennen der Reihe nach ihren Wunsch.

   Erstelle ein Baumdiagramm!

   Wie groß ist bei Annahme eines Laplace-Modells die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, dass die Wünsche nicht alle erfüllt werden können, wenn der Koch von jedem Gericht nur noch eines vorrätig hat?

   Beschreibe, wie dieses Experiment als Urnenexperiment simuliert werden könnte.

5. An der Garderobe werden an 4 Gäste im Dunkeln 4 Mäntel zurückgegeben.

   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass kein Gast den eigenen Mantel erhält.

6. In der Bibliothek stehen 10 verschiedene Bände einer beliebten Jugendbuch-Serie. 4 Schüler äußern jeweils einen Buch-Wunsch. Betrachte im Laplace-Modell das Ereignis E: „Jeder Schüler wünscht ein anderes Buch“. Zeige: $P(E) \approx 50$ %.

   Angenommen, bei 10-maliger Durchführung dieses Experiments tritt das Ereignis E nur 2-mal ein. Beweist dies, dass die Laplace-Annahme falsch war?

8. Klasse Übungsaufgaben	8
Lineare Gleichungssysteme	**09**

1. Löse folgende Gleichungssysteme:

   (a)
   $$\begin{aligned} 6x+5y &= -36 \\ -7x+3y &= -11 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} 2x-6y &= 1 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$

2. Löse das Gleichungssystem rechnerisch und graphisch:
   $$\begin{aligned} y &= 2x-1 \\ x &= \tfrac{1}{2}y+3 \end{aligned}$$

3. Lineare Gleichungssysteme mit mehreren Variablen — Musteraufgabe

   In der Regel empfiehlt sich das Additionsverfahren, wobei man zunächst aus je zwei verschiedenen Gleichungen dieselbe Variable eliminiert. Beispiel:

   $$\begin{array}{lrcl|l|l} \text{I} & 3a-2b+5c &=& 13 & \cdot 1 & \\ \text{II} & -a+3b+4c &=& -1 & \cdot 3 & \cdot 5 \\ \text{III} & 5a+6b-c &=& 3 & & \cdot 1 \\ \hline \text{IV (aus I, II)} & 7b+17c &=& 10 & \cdot 3 & \\ \text{V (aus II, III)} & 21b+19c &=& -2 & \cdot(-1) & \\ \hline & 32c &=& 32 & \Rightarrow \underline{c=1} & \\ \text{in IV} & 7b+17\cdot 1 &=& 10 & \Rightarrow \underline{b=-1} & \\ \text{in I} & 3a-2\cdot(-1)+5\cdot 1 &=& 13 & \Rightarrow \underline{a=2} & \\ & L &=& \{(2;-1;1)\} & & \end{array}$$

   Löse nun selbst folgendes Gleichungssystem:
   $$\begin{aligned} 2x+y-3z &= 5 \\ 3x-2y+z &= 6 \\ 4x+3y-2z &= 16 \end{aligned}$$

4. Bestimme für die Gleichung $y = mx + t$ die Zahlen m und t, wenn für $(x; y)$ die Punkte $(2; 3)$ und $(-1; 5)$ eingesetzt werden können.

5. Klaus zahlt für 17 normale und 2 Farbkopien 9,84 Euro, Claudia für 1 Farbkopie und 39 normale Kopien 8,58 Euro. Wie viel kostet eine Farbkopie?

6. Franzi und Nikola sparen auf einen DVD-Player. Franzi besitzt 50 Euro und kann jeden Monat 5 Euro dazulegen. Nikola beginnt 2 Monate später mit 0 Euro zu sparen, kann aber jeden Monat 10 Euro sparen. Beide können zum selben Zeitpunkt das gleiche Gerät kaufen. Löse graphisch, wann und zu welchem Preis der DVD-Player gekauft wird.

   Entnimm der Grafik: Wie sieht die Situation vor diesem Zeitpunkt aus? Wie sieht die Situation für einen DVD-Rekorder einer anderen Marke zum Preis von 150 Euro aus?

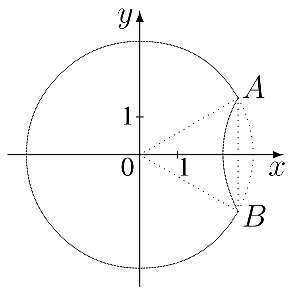
8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Kreis, Prisma, Zylinder	**10**

1. Kreismessung

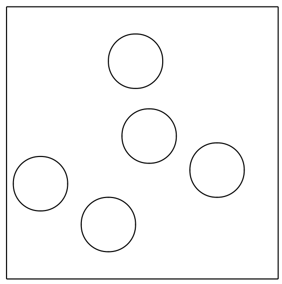
   (a) Berechne die Fläche eines Kreisrings mit innerem Radius $r = 7$ und äußerem Radius $R = 11$.

   (b) Gegeben ist der Umfang $u = 10,99$ eines Kreises. Berechne den Durchmesser und die Fläche dieses Kreises. Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn man einen Kreis mit 11-fachem Umfang nimmt?

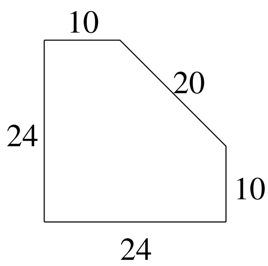
   (c) Die nebenstehende „Sonnenfinsternis“ entsteht, indem man von einem Kreis um $(0|0)$ mit Radius $r = 3$ den „rechts“ von $x = 2{,}6$ liegenden Kreisbogen nach „links“ spiegelt. Das entstehende „Tortenstück“ hat dann einen Winkel von ungefähr $60°$, also $\overline{AB} \approx 3$. Berechne die Bogenlänge des Tortenstücks, die Fläche des umgeklappten („rechts“ von $x = 2{,}6$ liegenden) Segments und die Fläche der Sonnenfinsternis-Figur.



   (d) Aus einem Quadrat mit Seitenlänge $a = 36$ werden wie in nebenstehender Figur n Kreise (ohne Überschneidung) mit Radius $r = 4$ herausgeschnitten. Für welche natürlichen Zahlen n ist die Fläche der so entstehenden Figur größer als 55 % der Quadratfläche?



2. Prisma
   Ein Prisma habe das nebenstehende 5-Eck als Grundfläche (Angaben gerundet in mm) und eine Höhe von 40 mm.



   (a) Zeichne ein Schrägbild des Prismas, sowohl als „liegendes“ als auch als „stehendes“Prisma.

   (b) Berechne Oberflächeninhalt und Volumen.

3. Zylinder

   (a) Berechne, wie oft man aus einer Regentonne (Höhe 80 cm, Durchmesser 70 cm) mit einem Spielzeugeimer (Höhe und Durchmesser je 16 cm) schöpfen kann.

   (b) Beurteile durch Rechnung: Für welchen Spielzeugeimer genötigt man bei gleichem Inhaltsvolumen mehr Material zur Herstellung:
   - Höhe und Durchmesser je 16 cm, oder
   - Durchmesser 18 cm und dafür etwas kleinere Höhe?

8. Klasse Übungen	08
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	**K**

1. Funktionen verstehen (siehe auch grund81.pdf):

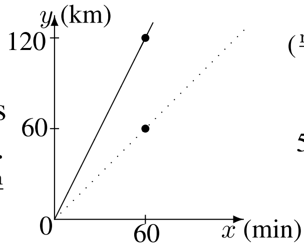
   Beschreibe in Worten, wie die Gerade $y = -\frac{1}{4}x - 2$ im Vergleich zu $y = -\frac{1}{4}x$ im Koordinatensystem liegt. Für welches x ist jeweils $y = 2$? Wo liegen die Nullstellen?

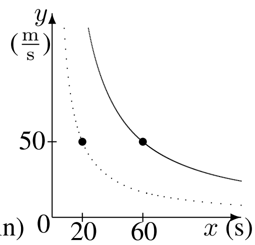
2. Lineare Funktionen (siehe auch grund82.pdf):

   Vergleiche folgende Möglichkeiten durch Zeichnen entsprechender Funktionsgraphen:
   A. Entfernter Supermarkt mit 2 Euro Fahrkosten, 1 Sack Kartoffeln zu 1,25 Euro.
   B. Benachbarter Supermarkt, 1 Sack Kartoffeln zu 2 Euro

3. Proportionalität (siehe auch grund83.pdf):

   Gegeben sind folgende Probleme:
   A. Bei gegebener Strecke von 3 km ist aus der Zeit die Geschwindigkeit zu bestimmen.
   B. Bei gegebener Geschwindigkeit 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist aus der Zeit die Strecke zu bestimmen.

   Ordne zu, welche Art Proportionalität jeweils vorliegt und welches der nebenstehenden Diagramme dazugehört. Erkläre, was jeweils die punktierte Linie beschreibt.

4. Ungleichungen, Potenzgesetze (siehe auch grund84.pdf):

   (a) Löse rechnerisch, für welche Menge Kartoffeln A in Aufgabe 3 billiger ist.

   (b) Vereinfache: $5{,}2(ab^2)^3a^{-5}c^0 - \dfrac{(5ab)^{-1}}{ab^{-7}}$

5. Gebrochen-rationale Funktionen (siehe auch grund85.pdf):

   Zeichne mit Asymptoten und Nullstelle den Graphen zu $f(x) = \frac{4}{x-4} + 1$.

6. Bruchterme (siehe auch grund86.pdf): Vereinfache: $\dfrac{1}{2x+14} - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x - x^2}{x+7}$

7. Bruchgleichungen, Auflösen von Formeln (siehe auch grund87.pdf):

   (a) $\frac{2}{x} - \frac{x}{x+3} = -1$ (b) Löse nach z auf: $\frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$

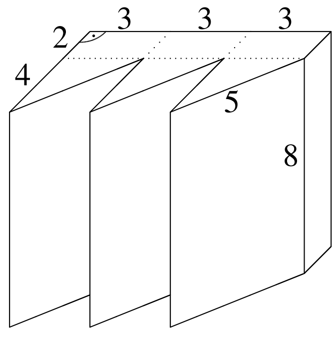
8. Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente (siehe auch grund88.pdf):

   Berechne die W., bei dreimaligem Würfeln drei verschiedene Augenzahlen zu werfen.

9. Lineare Gleichungssysteme (siehe auch grund89.pdf): $\begin{aligned} 2x + 5y &= 2 \\ 6x - 8y &= 29 \end{aligned}$

10. Kreis, Prisma, Zylinder (siehe auch grund810.pdf):

    Vergleiche Volumen und Oberfläche; beschreibe das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis:
    Prisma wie hier abgebildet.
    Zylinder mit Grundfläche 16π und Höhe 8.

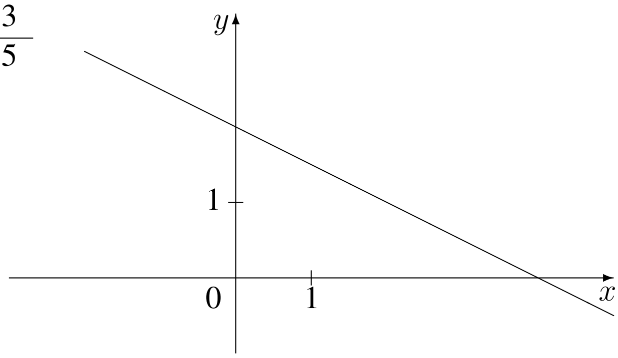
8. Klasse Lösungen — 8
Funktionen verstehen — 01

1. (a) Der y-Wert ist jeweils um 3 größer. Der Graph ist um 3 Einheiten nach oben verschoben.
   Da sich z. B. für den x-Wert -4 der gleiche Funktionswert $y = (-4)^2+3 = 4^2+3$ ergibt wie beim x-Wert $+4$, allgemein bei $-x$ der gleiche y-Wert wie bei $+x$, sind die Funktionsgraphen achsensymmetrisch zur y-Achse.
   (b) Die y-Werte sind jeweils 3-mal so groß. Der Graph ist in y-Richtung 3-fach gestreckt, also steiler.

2. Die Terme stellen den Wert des jeweiligen Rades nach x Jahren dar. Der x-Wert des Schnittpunktes gibt also an, nach wie vielen Jahren beide Räder gleichen Wert haben; der y-Wert ist dann dieser Wert (in Euro).
   Gleichsetzen $-200x + 1800 = -70x + 800$ liefert $130x = 1000$; $x = \frac{100}{13} \approx 7{,}7$.
   Einsetzen in $y = -200x + 1800$: $y = -200 \cdot \frac{100}{13} + 1800 = 261\frac{7}{13}$
   Einsetzen in $y = -70x + 800$: $y = -70 \cdot \frac{100}{13} + 800 = 261\frac{7}{13}$.

3.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5



   Schnittpunkt mit y-Achse:
   Einsetzen von $x = 0$ liefert $y = 2$.

   Schnittpunkt mit x-Achse (Nullstelle):
   Funktionsterm gleich 0 setzen: $-0{,}5x + 2 = 0$; $-0{,}5x = -2$; $x = 4$.

   Punkte auf dem Graphen:
   P: Einsetzen von $x = 2$ liefert $y = -0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1$, also $P(2|1)$
   Q: Einsetzen von $y = 5$ liefert $5 = -0{,}5 \cdot x + 2$; $x = -6$, also $Q(-6|5)$
   R': Einsetzen von $x = 100$ liefert $y = -0{,}5 \cdot 100 + 2 = -48$.
   Für einen Punkt R unterhalb des Graphen, also unterhalb von R' muss also ein y-Wert kleiner als -48 gewählt werden, z. B. $R(100| - 50)$.

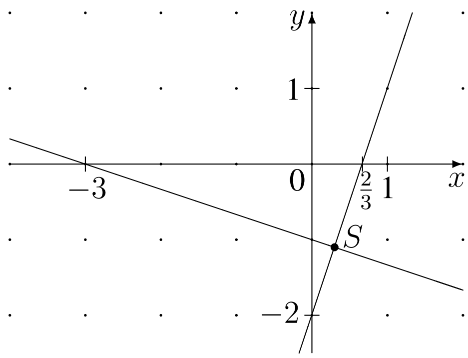
4. Berechne durch Gleichsetzen von zwei Funktionstermen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ den Schnittpunkt dieser beiden Graphen und prüfe durch Einsetzen des sich ergebenden x-Wertes in den dritten Funktionsterm, ob sich der gleiche y-Wert ergibt wie bei den ersten beiden Funktionstermen.

5. Die Wertetabelle der zweiten Funktion weist y-Werte mit genau anderem Vorzeichen auf. Der Funktionsgraph ist an der x-Achse gespiegelt.

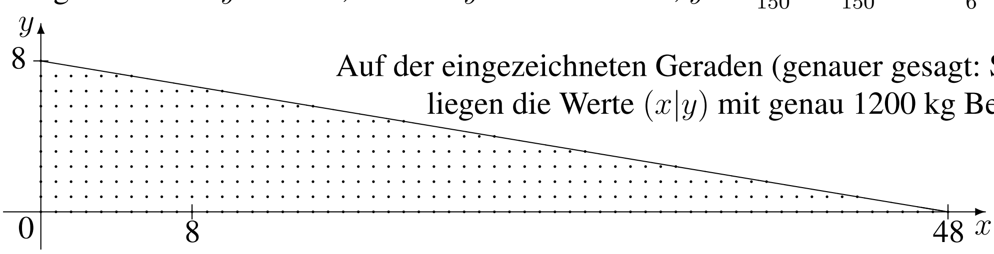
6. Einsetzen der Punktkoordinaten $x = -3$ und $y = -4$ in die Funktionsgleichung $y = x^2 - 2x + a$ liefert $-4 = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + a$, also $-4 = 9 + 6 + a$ und somit $a = -19$.

8. Klasse Lösungen	8
Lineare Funktionen	**02**

1. (a) Wegen des y-Achsenabschnitts -1 kommen nur I und II in Frage, wegen der Steigung $\frac{5}{4}$ (4 nach rechts, 5 nach oben) ist es II.
   (b) III hat die Gleichung $y = x + 1{,}25$
2. (a) Da P auf der y-Achse liegt, sieht man den y-Achsenabschnitt $t = 3$.
   Von P nach Q: 2 nach rechts, 6 nach unten, also Steigung $m = \frac{-6}{2} = -3$.
   Somit $y = -3x + 3$
   (b) Aus den Koordinaten sieht man ein Steigungsdreieck zwischen P und Q: 2 nach rechts, 4 nach unten, also Steigung $m = \frac{-4}{2} = -2$; damit macht man den Ansatz $y = mx + t = -2x + t$.
   t bestimmt man durch Einsetzen z. B. von $P(1; 3)$: $3 = -2 \cdot 1 + t$; also $t = 5$.
   Somit $y = -2x + 5$
3. Nach Spiegelung an der x-Achse lautet die Gleichung $y = 7x$ (dann steigende Gerade), nach anschließender Verschiebung nach unten $y = 7x - 3$ (zu $y = 7x$ parallele Gerade).
4. (a) Parallele zur x-Achse (1 Einheit unter der x-Achse).
   (b) $y = -x - 2$ bedeutet: Fallende Gerade mit Steigung -1, also „1 nach rechts, 1 nach unten“ ($45°$ abwärts geneigt) und y-Achsenabschnitt -2, also ist die Winkelhalbierende des II./IV. Quadranten um 2 Einheiten nach unten verschoben.
5. $y = 3x - 2$:
   Nullstelle: $0 = 3x - 2$; $3x = 2$; $x = \frac{2}{3}$
   $y = -\frac{1}{3}x - 1$:
   Nullstelle: $0 = -\frac{1}{3}x - 1$; $\frac{1}{3}x = -1$; $x = -3$
   Schnittpunkt: $3x - 2 = -\frac{1}{3}x - 1$;
   $3x + \frac{1}{3}x = -1 + 2$; $\frac{10}{3}x = 1$;
   $x = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
   Eingesetzt in eine der Gleichungen:
   $y = 3 \cdot 0{,}3 - 2 = -1{,}1$.
   Also Schnittpunkt $S(0{,}3; -1{,}1)$



   Steigungen $m_1 = 3$ und $m_2 = -\frac{1}{3}$: Steigungsdreiecke „1 nach rechts, 3 nach oben“ und „3 nach rechts, 1 nach unten“ sind um $90°$ gedreht, daher $m_2 = -\frac{1}{m_1}$
6. In kg: $25x + 150y = 1200$, also $150y = 1200 - 25x$; $y = \frac{1200}{150} - \frac{25}{150}x = -\frac{1}{6}x + 8$



Auf der eingezeichneten Geraden (genauer gesagt: Strecke) liegen die Werte $(x|y)$ mit genau 1200 kg Beladung.

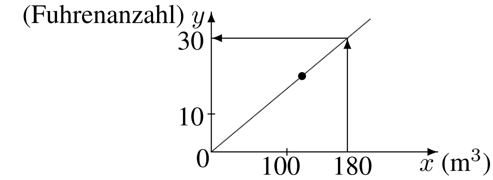
Ist $25x + 150y \leq 1200$ („maximal 1,2 t“), so geben die Punkte auf oder unterhalb der Geraden die möglichen Beladungen wieder (Strecke und punktierter Bereich).

8. Klasse Lösungen — 8
Proportionalität — 03

1. (a) Man überlegt, wie viele Fuhren für 1 m^3 notwendig wären:

$$\begin{aligned} 120\text{ m}^3 &\mapsto 20\text{ Fuhren}\\ 1\text{ m}^3 &\mapsto \tfrac{20}{120}\text{ Fuhren}\\ 180\text{ m}^3 &\mapsto \tfrac{20}{120}\cdot 180\text{ Fuhren} =\\ &= 30\text{ Fuhren}\end{aligned}$$

   (b) Durch den Nullpunkt und durch den Punkt $(120|20)$ zeichnet man eine Gerade. Dann kann man zum x-Wert 180 den gewünschten y-Wert ablesen.



2. Indirekte Proportionalität (bei doppelt so vielen Lkws braucht man halb so lange), vorausgesetzt die Lkws sind gleich und behindern sich nicht gegenseitig.

   Lösung bequem z. B. mit Produktgleichheit: $3\cdot 20 = 5\cdot y$, also $y = \frac{3\cdot 20}{5}$, also 12 h; oder mit Schlussrechnung (Dreisatz): 1 Lkw $\mapsto 20\cdot 3$ h, 5 Lkws $\mapsto 60 : 5$ h.

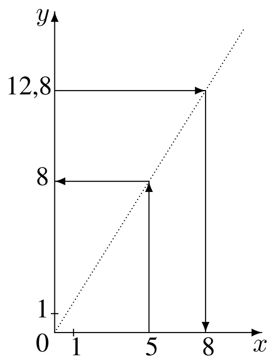
   Hier zwar möglich, aber umständlicher: Bei $\frac{5}{3}$-mal so viele Lkws benötigt man die $\frac{3}{5}$-fache Zeit; oder durch Aufstellen der Gleichung $y = \frac{60}{x}$ oder (ungenau) durch Zeichnen dieser Hyperbel.

3.

Schülerzahl x	2	4	6	8	10
Euro-Betrag y	3,2	6,4	9,6	12,8	16

   Gleichung: $y = 1{,}6x$

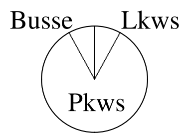
   In einer Schülergruppe von 5 Schülern müssen 8 Euro eingesammelt werden (klar: für $\frac{1}{10}$ der Schüler nur $\frac{1}{10}$ Materialkosten).
   Eine Schülergruppe, die 12,80 Euro bezahlt, besteht aus 8 Schülern.



4. Abgelesen werden z. B. $(1|2{,}4)$, $(2|1{,}2)$, $(5|0{,}5)$.
   Bei indirekter Proportionalität hat man Produktgleichheit.
   Berechne also die Produkte: $1\cdot 2{,}4 = 2{,}4$; $2\cdot 1{,}2 = 2{,}4$; $5\cdot 0{,}5 = 2{,}5$.
   Innerhalb der Messgenauigkeit sind die Produkte gleich, es handelt sich somit um eine indirekte Proportionalität mit der Gleichung $y = \frac{2{,}4}{x}$.

5. In allen drei Fällen handelt es sich um eine direkte Proportionalität.

$$\begin{aligned} 84\ \% &\mapsto 21\text{ Fahrzeuge}\\ 1\ \% &\mapsto \tfrac{21}{84}\text{ Fahrzeuge}\\ 100\ \% &\mapsto \tfrac{21\cdot 100}{84} = 25\text{ Fahrzeuge (oder direkt } 21 : 0{,}84 = 25)\end{aligned}$$



   Es sind also $25 - 21 - 2 = 2$ Lkws, 2 Busse (je 8 %, denn 1 Fahrzeug $\hat{=}$ 4 %).

   Im Kreisdiagramm ergeben 100 % den Vollkreis 360°; die 8 % Busse erhalten also $360°\cdot\frac{8}{100} = 28{,}8°$, die Lkws ebenso und die Pkws den Rest.

6. Da die Masse gleich ist, handelt es sich um gleiche Produkte $\rho\cdot V$, also um eine indirekte Proportionalität. Daher ist im Vergleich zu Platin bei Silber (halbe Dichte) das Volumen doppelt, bei Keramik ($\frac{1}{10}$ Dichte) das Volumen 10-fach.

# 8. Klasse Lösungen	8
Lineare Ungleichungen, Potenzgesetze	**04**

1. (a) $5x + \frac{5}{3} \le -2x - \frac{2}{3} \qquad | \cdot 3$
   $15x + 5 \le -6x - 2$
   $21x \le -7$
   $x \le -\frac{1}{3}; \qquad L =]-\infty; -\frac{1}{3}]$

   (b) • $-5x \le 5^{-1}x - 1$
   $-5x \le \frac{1}{5}x - 1 \qquad | - \frac{1}{5}x$
   $-5{,}2x \le -1 \qquad | : (-5{,}2)$
   $x \ge \frac{1}{5{,}2}; \qquad L = [\frac{5}{26}; \infty[$

   • $-5x > -2(x + 7)$
   $-5x > -2x - 14 \qquad | + 2x$
   $-3x > -14 \qquad | : (-3)$
   $x < \frac{14}{3}; \qquad L =]-\infty; \frac{14}{3}[$

   (c) $-x \le 5$ liefert nach Umformung (Multiplikation mit -1) $x \ge -5$

   (d) $-x > 0 \qquad | \cdot (-1)$
   $x < 0; \qquad L =]-\infty; 0[$

2. (a) Menge Wasser (in ml) im Becher x Sekunden nach dem Start.

   (b) $70 \le 7{,}5x + 20 \le 140 \qquad | - 20$
   $50 \le 7{,}5x \le 120 \qquad | : 7{,}5$
   $\frac{20}{3} \le x \le 16$
   Ab dem Zeitpunkt $\frac{20}{3} \approx 6{,}7$ Sekunden bis zum Zeitpunkt 16 Sekunden nach Beginn ist die Wassermenge im gewünschten Bereich.

   (c) $7{,}5x + 20 < 9{,}5x \qquad | - 7{,}5x$
   $20 < 2x \qquad | : 2$
   $10 < x$ bzw. (wenn man die Ungleichung von rechts nach links liest) $x > 10$, d. h. für Zeitpunkte später als 10 s nach dem Beginn ist im ersten Becher weniger als im neuen.

3. (a) Die Zahlenfolge wird von Schritt zu Schritt jeweils durch $\frac{5}{2}$ dividiert:
   $(\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8}$, $(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$, $(\frac{5}{2})^1 = \frac{5}{2}$, $(\frac{5}{2})^0 = 1$, $(\frac{5}{2})^{-1} = \frac{2}{5}$, $(\frac{5}{2})^{-2} = \frac{4}{25}$, $(\frac{5}{2})^{-3} = \frac{8}{125}$

   (b) $(-5)^{-3} \cdot 5^{15} \cdot (2^3)^4 = \frac{1}{(-5)^3} \cdot 5^{15} \cdot 2^{12} = -\frac{5^{15}}{5^3} \cdot 2^{12} = -5^{12} \cdot 2^{12} = -10^{12}$
   (Minus 1 Billion)

   (c) • $c^6 \cdot c^{-8} = c^{6+(-8)} = c^{-2} = \frac{1}{c^2}$
   • $\frac{d^{-3}}{d^{-4}} = d^{-3-(-4)} = d^1 = d$
   • $8e^2f^2 + 9^2(ef)^2 = 8e^2f^2 + 81e^2f^2 = 89e^2f^2$
   • $(g^h)^2 = g^{h \cdot 2} = g^2h$

   (d) $(\frac{x}{2})^{-2} \stackrel{A}{=} \frac{1}{(\frac{x}{2})^2} \stackrel{B}{=} 1 : (\frac{x}{2})^2 \stackrel{C}{=} 1 : \frac{x^2}{2^2} \stackrel{D}{=} 1 \cdot \frac{2^2}{x^2} \stackrel{E}{=} (\frac{2}{x})^2$.
   A: Negativer Exponent: „Ich stehe im Nenner“
   B: Bruch als Quotient schreiben
   C: Potenzrechenregel $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
   D: Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert
   E: Potenzrechenregel $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

   (e) $$\left(\frac{11x^{-3}}{4y^5}\right)^2 : \left(\frac{2}{y}\right)^{-3} = \frac{11^2x^{-6}}{4^2y^{10}} : \frac{y^3}{2^3} = \frac{121}{16y^{10}x^6} \cdot \frac{8}{y^3} = \frac{121 \cdot 8}{16y^{13}x^6} = \frac{121}{2x^6y^{13}}$$

4. $A = (62 \cdot 10^{-6}\text{ m})^2 = 3844 \cdot 10^{-12}\text{ m}^2 = 3{,}844 \cdot 10^{-9}\text{ m}^2$.
   Anzahl auf 1 $\text{cm}^2 = 0{,}0001\text{ m}^2$ somit $0{,}0001 : (3{,}844 \cdot 10^{-9}) \approx 2{,}6 \cdot 10^4$

8. Klasse Lösungen — 8

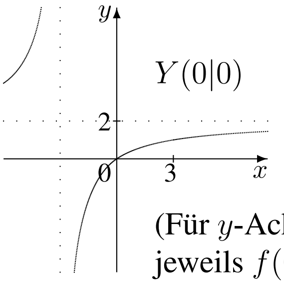
Gebrochen-rationale Funktionen — 05

1. Aus Platzgründen sind die Wertetabellen hier stark verkürzt und gerundet:

(a)

x	-3	0	3	100
y	↯	0	1	1,9

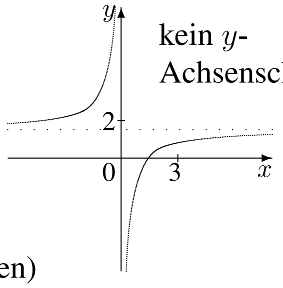
Waagrechte Asymptote: $y = 2$
Senkrechte Asymptote: $x = -3$



(b)

x	-3	0	3	100
y	2,2	↯	0,8	1,5

Waagrechte As.: $y = 1{,}5$
Senkrechte As.: $x = 0$

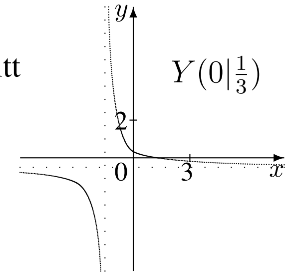


kein y-Achsenschnitt

(c)

x	-3	0	3	100
y	–1,3	0,3	–0,2	–0,5

Waagrechte As.: $y = -0{,}5$
Senkrechte As.: $x = -1{,}5$

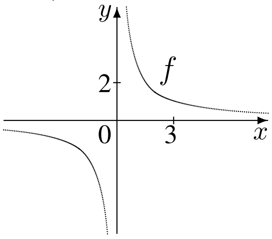


(Für y-Achsenschnitt jeweils $f(0)$ betrachten)

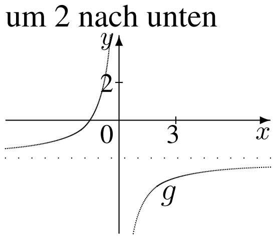
2. $f(x) = 0$, also $-\frac{2}{x} + \frac{3}{2} = 0 \quad | -\frac{3}{2}$, dann $| \cdot x$
$-2 = -\frac{3}{2}x$, also $x = (-2) : (-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}$, somit $N(\frac{4}{3}|0)$

3.

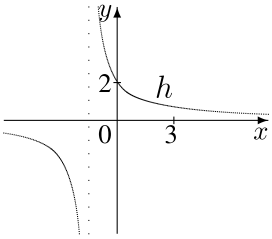
x	-3	0	1	3
y	-3	↯	3	1



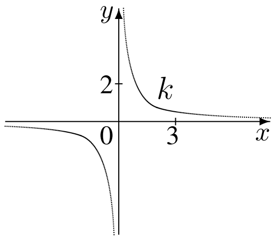
Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 2 nach unten



Verschiebung um 1,5 nach links



Alle y-Werte halb so groß



4. (a) $D = \mathbb{Q}\backslash\{0; 5\}$ (Das Produkt im Nenner ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist)
(b) $D = \mathbb{Q}\backslash\{\frac{5}{8}\}$ (Nebenrechnung: $8x - 5 = 0$; $8x = 5$; $x = \frac{5}{8}$)
(c) $D = \mathbb{Q}\backslash\{1\}$ (Nebenrechnung: $(x-1)^2 = 0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$)

5. 20 % $= 0{,}2$, also $f(0{,}2) = \frac{15000}{1+0{,}2} = 12500$ = anzulegendes Anfangskapital (in Euro).

$x = -0{,}8 = -80$ % bedeutet eine Kapitalverminderung um 80 %, also auf 20 % $= \frac{1}{5}$ des Anfangswertes; umgekehrt war also der Anfangswert 5-mal so groß: $f(-0{,}8) = \frac{15000}{1-0{,}8} = 75000$.

Definitionslücke $x = -1$: Bei Kapitalverminderung um 100 % bliebe nichts mehr übrig (der Fall eines Endkapitals von 75000 kann also nicht sein).

Waagrechte Asymptote $y = 0$: Große x (= starke Kapitalvermehrung, z. B. um 100 = 10000 %): Aus einem Anfangskapital von fast 0 entsteht dann das Endkapital.

6. $f(x)$: C, weil Nenner $4x^2 + 2$ stets positiv, also keine Definitionslücke.
$g(x)$: A, weil $D = \mathbb{Q}\backslash\{-2; 2\}$: Zwei Definitionslücken $x = -2$ und $x = 2$.
$h(x)$: B, weil $D = \mathbb{Q}\backslash\{-2\}$: Einzige Definitionslücke $x = -2$, Nullstellen ± 1
$k(x)$: D, weil $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{2}{3}\}$: Definitionslücke (doppelter Pol) $x = -\frac{2}{3}$, keine Nst

Begründung wäre z. B. auch möglich mit jeweils einer kleinen Wertetabelle und Vergleich mit Graphen.

8. Klasse Lösungen — 8
Rechnen mit Bruchtermen — 06

1. (a) Nebenrechnung: $36x^2 - 16x = 0;$
$4x(9x-4) = 0;$
$x = 0$ oder $9x - 4 = 0;$
$x = 0$ oder $9x = 4;$
$x = 0$ oder $x = \frac{4}{9}.$
Damit ist $D = \mathbb{Q}\backslash\{0; \frac{4}{9}\}$

(b) Verboten sind:
$x - 6 = 0$ und $6x + 1 = 0,$
also verboten:
$x = 6$ und $6x = -1.$
Somit $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{1}{6}; 6\}$

2. (a) $\frac{45x-20}{36x^2-16x} = \frac{5(9x-4)}{4x(9x-4)} = \frac{5}{4x}$

(b) $\frac{(ab)^2}{a^3b - a^2b^3} = \frac{a^2b^2}{a^2b(a-b^2)} = \frac{b}{a-b^2}$

3. $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1+R_2} = \frac{R_2(R_1+R_2)+R_1(R_1+R_2)+R_1R_2}{R_1R_2(R_1+R_2)} = \frac{3R_1R_2+R_2^2+R_1^2}{R_1R_2(R_1+R_2)}$

4. (a) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+2-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$

(b) $\frac{24-x}{x+3} - 8 = \frac{24-x}{x+3} - \frac{8(x+3)}{x+3} = \frac{24-x-8(x+3)}{x+3} = \frac{24-x-8x-24}{x+3} = \frac{-9x}{x+3} = -\frac{9x}{x+3}$

(c) Zuerst faktorisieren, dann (-1)-Trick, dann auf gleichen Nenner bringen:
$\frac{6x^2+5}{36x^2-16x} + \frac{3x}{8-18x} = \frac{6x^2+5}{4x(9x-4)} + \frac{3x}{2(4-9x)} = \frac{6x^2+5}{4x(9x-4)} - \frac{3x}{2(9x-4)} =$
$= \frac{6x^2+5}{4x(9x-4)} - \frac{3x\cdot 2x}{4x(9x-4)} = \frac{6x^2+5-6x^2}{4x(9x-4)} = \frac{5}{4x(9x-4)}$

(d) $\frac{6x+11}{2x+4} - \frac{2x+5}{x^2+2x} - 3 = \frac{6x+11}{2(x+2)} - \frac{2x+5}{x(x+2)} - 3 = \frac{(6x+11)x}{2x(x+2)} - \frac{(2x+5)\cdot 2}{2x(x+2)} - \frac{3\cdot 2x(x+2)}{2x(x+2)} =$
$= \frac{6x^2+11x-(4x+10)-(6x^2+12x)}{2x(x+2)} = \frac{6x^2+11x-4x-10-6x^2-12x}{2x(x+2)} = \frac{-5x-10}{2x(x+2)} =$
$= \frac{-5(x+2)}{2x(x+2)} = \frac{-5}{2x} = -\frac{5}{2x}$

5. (a) $\frac{74x-34}{x+1} \cdot \frac{x^2+1}{74x+34} =$
$= \frac{(74x-34)(x^2+1)}{(x+1)(74x+34)} = \frac{2(37x-17)(x^2+1)}{(x+1)2(37x+17)} = \frac{(37x-17)(x^2+1)}{(x+1)(37x+17)}$
Eine weitere Vereinfachung ist nicht möglich, da x^2+1 nicht faktorisiert werden kann und nicht weiter gekürzt werden kann.

(b) $\frac{az}{z-a} : \frac{a^2z^3}{az-a^2} = \frac{az}{z-a} \cdot \frac{az-a^2}{a^2z^3} = \frac{az\cdot a(z-a)}{(z-a)\cdot a^2z^3} = \frac{1}{z^2}$

6. (a) $\frac{\frac{J}{C}}{J} = \frac{J}{C} : J = \frac{J}{C\cdot J} = \frac{1}{C}$

(b) $\frac{J}{\frac{J}{C}} = J : \frac{J}{C} = J \cdot \frac{C}{J} = \frac{J\cdot C}{J} = \frac{C}{1} = C$

(c) $\frac{\frac{1}{x^2} - 2}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1-2x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} =$
$= \frac{1-2x^2}{x^2} : \frac{x-1}{x} = \frac{1-2x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{(1-2x^2)x}{x^2(x-1)} = \frac{1-2x^2}{x(x-1)}$

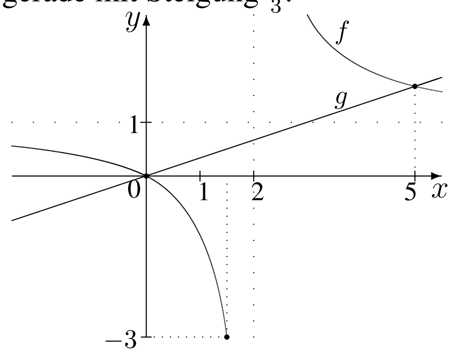
8. Klasse Lösungen	8
Bruchgleichungen, Formeln auflösen	**07**

1. (a) $D = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}$. Kreuzweise Mult.: $2 \cdot 10 = 5x + 15$; $x = 1$; $L = \{1\}$
   (b) $D = \mathbb{Q}\backslash\{1; 3\}$. Kreuzweises Multiplizieren liefert:
   $2(x-1) = 3(x-3)$; $2x - 2 = 3x - 9$; $x = 7$; $L = \{7\}$
   (c) $D = \mathbb{Q}\backslash\{1\}$. Multiplikation mit dem Hauptnenner $x - 1$ liefert:
   $3x^2 - 3x(x-1) = 1 + 2(x-1)$
   $3x^2 - 3x^2 + 3x = 1 + 2x - 2$ $x = -1$ $L = \{-1\}$
   (d) $D = \mathbb{Q}\backslash\{1\}$. Multiplikation mit dem Hauptnenner $x - 1$ liefert:
   $3x^2 - 3x(x-1) = 3 + 2(x-1)$
   $3x^2 - 3x^2 + 3x = 3 + 2x - 2$ $x = 1$ $L = \{\}$
   (Beachte hier, dass $x = 1$ nicht in der Definitionsmenge ist!)
   (e) Nenner faktorisieren: $2x + 6 = 2(x+3)$, $x^2 + 3x = x(x+3)$.
   Also $D = \mathbb{Q}\backslash\{-3; 0\}$. Multiplikation mit dem Hauptnenner $4x(x+3)$ liefert:
   $5 \cdot 2x - (1 - 0{,}25x^2) \cdot 4 = x(x+3)$
   $10x - 4 + x^2 = x^2 + 3x$; $7x = 4$ $x = \frac{4}{7}$ $L = \{\frac{4}{7}\}$

2. Wertetabelle (gerundetete Werte) für f:

x	-2	-1	0	1	2	3	100
$f(x)$	0,5	0,33	0	−1	$\lightning$	3	1,02

Der Graph zu g ist eine Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{1}{3}$.



Nullstelle: $f(x) = 0$
$\frac{x}{x-2} = 0 \quad | \cdot (x-2)$
$x = 0 \cdot (x-2)$
$x = 0$

x-Wert mit $f(x) = -3$
$\frac{x}{x-2} = -3$
$x = -3(x-2)$
$x = -3x + 6$
$4x = 6$
$x = \frac{6}{4} = 1{,}5$

Schnittpkte: $f(x)=g(x)$
$\frac{x}{x-2} = \frac{1}{3}x \quad | \cdot 3(x-2)$
$3x = x(x-2)$
$3x = x^2 - 2x$
$x^2 - 5x = 0$
$x(x-5) = 0$
$x = 0$ oder $x - 5 = 0$
$x_1 = 0$, $x_2 = 5$
y-Werte durch Einsetzen in $f(x)$ oder $g(x)$:
$S_1(0|0)$, $S_2(5|\frac{5}{3})$

3. (a) (1) $c_1m_1\vartheta_1 - c_1m_1\vartheta_m = c_2m_2\vartheta_m - c_2m_2\vartheta_2 \quad | + c_1m_1\vartheta_m + c_2m_2\vartheta_2$
   (2) $c_1m_1\vartheta_1 + c_2m_2\vartheta_2 = c_2m_2\vartheta_m + c_1m_1\vartheta_m$
   (3) $c_1m_1\vartheta_1 + c_2m_2\vartheta_2 = (c_2m_2 + c_1m_1)\vartheta_m \quad | : (c_2m_2 + c_1m_1)$
   (4) $\frac{c_1m_1\vartheta_1 + c_2m_2\vartheta_2}{c_2m_2 + c_1m_1} = \vartheta_m$
   (b) $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$; $Bg = bG$; $g = \frac{bG}{B}$
   (c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad | \cdot fgb$
   $gb = fb + fg$; $gb - fg = fb$; $g(b-f) = fb$; $g = \frac{fb}{b-f}$
   (d) Wie in (c): $gb = fb + fg$; $gb = f(b+g)$; $f = \frac{gb}{b+g}$
   (e) $\rho_a Vg = mg + \rho_i Vg$; $\rho_a V - \rho_i V = m$; $(\rho_a - \rho_i)V = m$; $V = \frac{m}{\rho_a - \rho_i}$

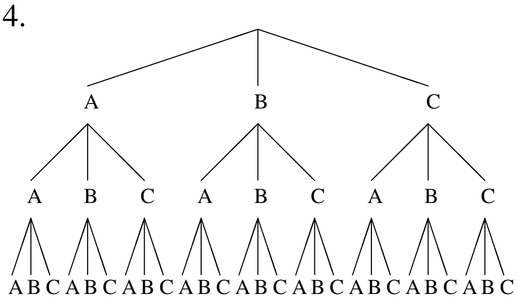
4. $\frac{a}{a-x} = 3$; $a = 3(a-x)$; $a = 3a - 3x$; $a - 3a = -3x$; $-2a = -3x$; $a = \frac{3x}{2}$
   Probe: $\frac{\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2} - x} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{3x \cdot 2}{2 \cdot x} = 3$

8. Klasse Lösungen — 8
Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente — 08

1.
Die Stockwerke des Kaufhauses werden unterschiedlich attraktiv sein, so dass sich keine Gleichwahrscheinlichkeit ergibt. Zudem könnten bei Herrn A und Frau B „Abhängigkeiten“ bestehen, dass beide gemeinsam häufiger das gleiche Stockwerk wählen.

2.
$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist ungünstig, da die Fächer nicht gleichwahrscheinlich sind.
Besser mit den links/rechts (L/R)-„Entscheidungen“ der Kugeln, also als Laplace-Raum $\Omega = \{LLLL, LLLR, LLRL, \ldots, RRRR\}$.
Da jedes Mal 2 Wahlmöglichkeiten vorliegen, ist $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
A = „Kugel fällt in Fach 0“ $= \{LLLL\}$, $P(A) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25$ %
B = „… Fach 3“ $= \{LRRR, RLRR, RRLR, RRRL\}$, $P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25$ %

3.
$|\Omega| = 110$.
$|A| = 8$, $P(A) = \frac{8}{110} \approx 0{,}073 = 7{,}3$ %
$|B| = 52$, $P(B) = \frac{52}{110} \approx 0{,}473 = 47{,}3$ %
$|C| = 6$, $P(C) = \frac{6}{110} \approx 0{,}055 = 5{,}5$ %
$|D| = 24$, $P(D) = \frac{24}{110} \approx 0{,}218 = 21{,}8$ % („≤ 4“, also 2, 3 oder 4)
$|E| = 110 - 24$,
$P(E) = 1 - P(D) = \frac{86}{110} \approx 0{,}782 = 78{,}2$ % („es werden mindestens [$\geq$] 5 Augen gezogen, d. h. mehr als 4“)
$|F| = 8 + 6$,
$P(F) = \frac{14}{110} \approx 0{,}127 = 12{,}7$ % („es wird ein As oder ein Joker gezogen“, oder: „es werden mehr als 10 Augen gezogen“)

4.


4. (Fortsetzung)
E: Ein Gericht wird mindestens 2-mal gewünscht (also z. B. AAA, AAB). Zählt man im Baumdiagramm alle solchen Pfade durch, so erhält man 21 von 27 Möglichkeiten, also $P(E) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \approx 77,8$ %.
Simulation als Urnenexperiment: Man legt in ein Gefäß je eine mit A, B, C beschriftete Kugel. Es wird (stellvertretend für den jeweils geäußerten Wunsch) dreimal gezogen, wobei das Ergebnis notiert wird, die Kugel zurückgelegt und wieder gemischt wird. Wenn dabei eine Kugel doppelt oder dreifach vorkommt, ist das Ereignis E eingetreten.

5.
Nummeriert man die Mäntel wie die entsprechenden Personen in der Rückgabe-Schlange, so ist $\Omega =$
$\{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,$
$2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,$
$3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,$
$4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321\}$
(z. B. 4132 bedeutet, dass die erste Person Mantel Nr. 4 erhält, die zweite Mantel Nr. 1, die dritte den eigenen Nr. 3, die vierte Nr. 2).
$A = \{2143, 2341, 2413, 3142, 3412,$
$3421, 4123, 4312, 4321\}$,
$P(A) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5$ %

6.
Alle Möglichkeiten: Der erste Schüler kann 10 Buch-Wünsche äußern, der zweite ebenso usw., also $|\Omega| = 10^4$.
Günstige Möglichkeiten: Wenn jeder Schüler ein anderes Buch wünscht, kann der erste Schüler 10 Wünsche äußern, der zweite nur noch 9, der dritte 8 usw. Also:
$P(E) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0{,}504 = 50{,}4$ %
Eine relative Häufigkeit von $\frac{2}{10}$ im realen Experiment widerlegt noch nicht die Laplace-Annahme, da sich zufällig ein solcher Versuchsausgang einstellen kann.
Nur bei sehr vielen Versuchen könnte man nach dem Gesetz der großen Zahlen eine solche Vermutung äußern, aber ein Beweis wäre es immer noch nicht.

8. Klasse Lösungen — 8
Lineare Gleichungssysteme — 09

1. (a) $$\begin{array}{ll} 6x+5y=-36 & |\cdot 3 \\ -7x+3y=-11 & |\cdot(-5) \\ \hline 53x \quad =-53 & \end{array}$$
$x=-1$
In I: $6\cdot(-1)+5y=-36$
$y=-6 \qquad L=\{(-1|-6)\}$

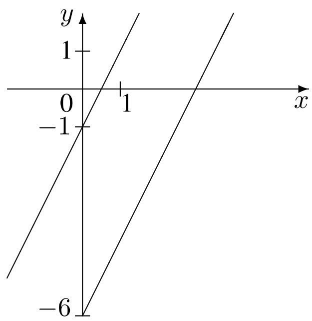
(b) $$\begin{array}{ll} 2x-6y=1 & | \\ x-y=1 & |\cdot(-2) \\ \hline -4y=-1 & \end{array}$$
$y=0{,}25$
In II: $x-0{,}25=1$
$x=1{,}25 \qquad L=\{(1{,}25|0{,}25)\}$

2. Es bietet sich hier das Einsetzverfahren an: II in I:

$y=2\cdot(\frac{1}{2}y+3)-1$
$y=y+5$
$0=5$

Lösungsmenge: Leere Menge: $L=\{\}$.

Graphisch:
Auflösen der zweiten Gleichung nach y:
$y=2(x-3)=2x-6$.



Es ergeben sich parallele Geraden, also keine gemeinsamen Punkte.

3. $$\begin{array}{lll} 2x+y-3z=5 & | & \\ 3x-2y+z=6 & |\cdot 3 & |\cdot 2 \\ 4x+3y-2z=16 & & | \\ \hline 11x-5y \quad =23 & | & \\ 10x-y \quad =28 & |\cdot(-5) & \\ \hline -39x \quad =-117 & & \end{array}$$
$x=3$
$10\cdot 3-y=28$
$y=2$
In II: $3\cdot 3-2\cdot 2+z=6$
$z=1 \qquad L=\{(3|2|1)\}$

4. $$\begin{array}{ll} 3=m\cdot 2+t & |\cdot(-1) \\ 5=m\cdot(-1)+t & | \\ \hline 2=-3m & \end{array}$$
$m=-\frac{2}{3}$
In I: $3=-\frac{2}{3}\cdot 2+t$
$t=\frac{13}{3}$

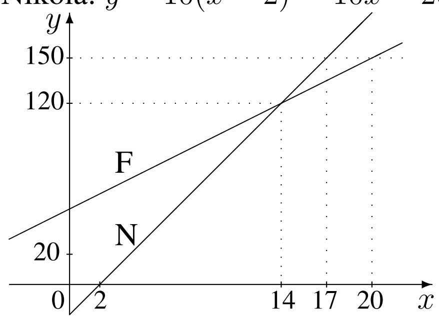
5. Sei n der Preis einer normalen und f der einer Farbkopie (in Euro).

$$\begin{array}{ll} 17n+2f=9{,}84 & | \\ 39n+\ \ f=8{,}58 & |\cdot(-2) \\ \hline -61n \quad =-7{,}32 & \end{array}$$
$n=0{,}12$
In II: $39\cdot 0{,}12+f=8{,}58$
$f=3{,}90$

Eine Farbkopie kostet 3,90 Euro.

6. Sei x die Zahl der Monate (ab Franzis Sparbeginn) und y der gesparte Betrag in Euro (= Preis des Geräts).

Franzi: $y=50+5x$
Nikola: $y=10(x-2)=10x-20$



Schnittpunkt: $x=14$, $y=120$.

Nach 14 (bzw. Nikola nach 12) Monaten kann der DVD-Player zu 120 Euro gekauft werden.

Vor diesem Zeitpunkt ist F. „reicher“, danach N.

Der Grafik entnimmt man, dass ein Gerät zu 150 Euro von Franzi nach 20 Monaten gekauft werden kann und von Nikola bereits 17 Monate nach Franzis Sparbeginn.

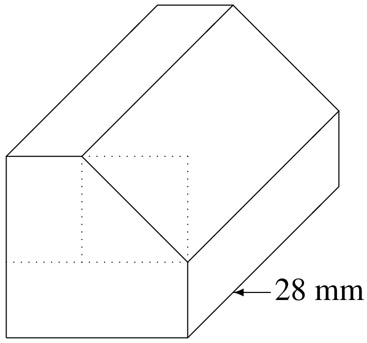
8. Klasse Lösungen — 8
Kreis, Prisma, Zylinder — 10

1. (a) $A = R^2\pi - r^2\pi = 11^2\pi - 7^2\pi = 72\pi \approx 226{,}2$

   (b) Aus $u = 2r\pi$ folgt $r = \frac{u}{2\pi} \approx 1{,}75$, somit $d = 2r \approx 3{,}5$ und $A = r^2\pi \approx 9{,}61$
   Wegen der Proportionalität von u und r ist bei 11-fachem Umfang der Radius ebenfalls 11-fach und die Fläche somit 121-fach.

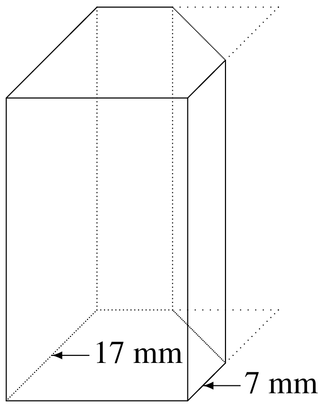
   (c) Der $60°$-Winkel schneidet aus dem $360°$-Vollkreis $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ heraus.
   Bogenlänge: $\frac{1}{6} \cdot 2r\pi = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3\pi = \pi \approx 3{,}14$.
   Segmentfläche: $\frac{1}{6}$-Kreis minus Dreieck mit Grundlinie $\overline{AB}$ und Höhe $h = 2{,}6$:
   $A_S = \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2{,}6 = 1{,}5\pi - 3{,}9 \approx 0{,}81$
   Sonnenfinsternis-Figur: $A = r^2\pi - 2A_S = 9\pi - 2(1{,}5\pi - 3{,}9) = 6\pi + 7{,}8 \approx 26{,}6$

   (d) Fläche des „Käsestücks“: $a^2 - nr^2\pi = 36^2 - n \cdot 4^2\pi \approx 1296 - 50{,}27n$
   55 % von der Fläche des Quadrats: $0{,}55 \cdot a^2 = 712{,}8$
   $1296 - 50{,}27n > 712{,}8 \qquad | + 50{,}27n - 712{,}8$
   $583{,}2 > 50{,}27n \qquad | : 50{,}27$
   $11{,}6 > n$, d. h. $n < 11{,}6$
   Also gilt das Gewünschte für alle natürlichen Zahlen bis einschließlich 11.



2. (a) Für das „liegende“ Prisma wird die Vorderseite in wahrer Größe gezeichnet, die nach hinten laufenden Linien statt 4 cm z. B. auf diagonale 4 Kästchen (ca. 28 mm) verkürzt.
   Für das stehende Prisma kann man sich die Grundfläche zu einem 24×24-Rechteck ergänzt denken und dieses zunächst im Schrägbild zeichnen (24 mm vorne in wahrer Größe, nach hinten laufende Linie wieder auf 2,4 diagonale Kästchen, also ca. 17 mm verkürzt. Entsprechend findet man die weiteren Eckpunkte des Prismas.

   (b) In mm (bzw. mm^2 bzw. mm^3):
   Grundfläche zerlegt in zwei Rechtecke und Dreieck: $G = 24 \cdot 10 + 10 \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 = 478$
   Oberfläche: $O = 2G + M = 2 \cdot 478 + (24 + 10 + 20 + 10 + 24) \cdot 40 = 4476$
   Volumen: $V = G \cdot h = 478 \cdot 40 = 19120$



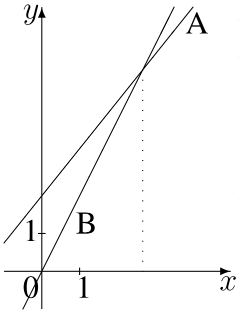
3. (a) Mit der Zylinder-Volumen-Formel $V = r^2\pi h$ berechnet man:
   $V_{\text{Tonne}} = (35\text{ cm})^2\pi \cdot 80\text{ cm} = 98000\pi\text{ cm}^3$ (≈ 308 Liter)
   $V_{\text{Eimer}} = (8\text{ cm})^2\pi \cdot 16\text{ cm} = 1024\pi\text{ cm}^3$ ($\approx 3{,}22$ Liter)
   Anzahl Eimer-Volumen im Tonnen-Volumen: $\frac{V_{\text{Tonne}}}{V_{\text{Eimer}}} = \frac{85750\pi}{1024\pi} = \frac{98000}{1024} \approx 95{,}7$.

   (b) Berechnung der Höhe des zweiten Eimers mit gleichem Volumen $1024\pi\text{ cm}^3$:
   $r_2^2\pi h_2 = 1024\pi\text{ cm}^3$, also $h_2 = \frac{1024\pi\text{ cm}^3}{r_2^2\pi} = \frac{1024}{9^2}\text{ cm} = \frac{1024}{81}\text{ cm} \approx 12{,}64\text{ cm}$.
   Materialbedarf (Boden-Grundfläche und Mantelfläche, in cm bzw. cm^2):
   $G_1 + M_1 = r_1^2\pi + 2r_1\pi h_1 = 8^2\pi + 2 \cdot 8\pi \cdot 16 = 96\pi\text{cm}^2 \approx 302$
   $G_2 + M_2 = r_2^2\pi + 2r_2\pi h_2 = 9^2\pi + 2 \cdot 9\pi \cdot \frac{1024}{81} = \frac{9043}{81}\pi \approx 351$
   Beim ersten Eimer wird weniger Material benötigt.

8. Klasse Lösungen — 08
Kompakt-Überblick zum Grundwissen — K

1.
$y=-\frac{1}{4}x$ ist eine flach fallende Ursprungsgerade, $y=-\frac{1}{4}x-2$ um 2 Einheiten tiefer.
2 als y-Wert: $2=-\frac{1}{4}x$, also $x=-8$ bzw. $2=-\frac{1}{4}x-2$, also $x=-16$.
Nst: $x=0$ bzw. $0=-\frac{1}{4}x-2$, also $x=-8$.

2.
Gesamtpreis y bei Kauf von x Säcken:



A: $y=1{,}25x+2=\frac{5}{4}x+2$
B: $y=2x$ (in Euro)
Schnittpunkt:
$2x=1{,}25x+2$,
also $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.
Bis zu 2 Säcken ist B günstiger, ab 3 Säcken A.

3.
A: Bei doppelter Zeit für die 3 km liegt halbe Geschw. vor, also indirekte Proportionalität; Hyperbel (rechts); Bedeutung des Produkts: $60\,\mathrm{s}\cdot 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=3000\,\mathrm{m}=3\,\mathrm{km}$; punktiert: Gleiches Problem bei geg. Strecke 1 km.
B: Bei doppelter Zeit kann man bei geg. Geschwindigkeit die doppelte Strecke zurücklegen, also direkte Proportionalität; Ursprungsgerade (links); Bedeutung des Quotienten: $\frac{120\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{min}}=120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$; punktiert: Gleiches Problem bei geg. Geschwindigkeit $60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

4.

(a) $1{,}25x+2<2x \quad |-2x-2$
$-0{,}75x<-2 \quad |:(-\frac{3}{4})$
$x>(-2):(-\frac{3}{4})=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

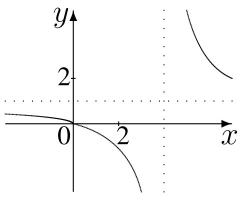
(b) $5{,}2(ab^2)^3a^{-5}c^0-\frac{(5ab)^{-1}}{ab^{-7}}$
$=5{,}2a^3(b^2)^3a^{-5}\cdot 1-\frac{5^{-1}a^{-1}b^{-1}}{ab^{-7}}$
$=5{,}2a^{3-5}b^{2\cdot 3}-0{,}2a^{-1-1}b^{-1-(-7)}$
$=5{,}2a^{-2}b^6-0{,}2a^{-2}b^6=5a^{-2}b^6=\frac{5b^6}{a^2}$

5.

x	-2	0	2	4	6	100
$y=\frac{x}{x-4}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\lightning$	3	$1{,}04$

(Fortsetzung siehe rechts oben)

5. (Fortsetzung)



Senkrechte As.: $x=4$ (Nenner!)
Waagrechte As.: $y=1$.
Nullstelle: $f(x)=0$:
$\frac{4}{x-4}+1=0$; $\frac{4}{x-4}=-1$;
$4=-1(x-4)$;
$4=-x+4$; $x=0$

6.
$\frac{1}{2x+14}-\frac{1}{x}\cdot\frac{x(1-x)}{x+7}=\frac{1}{2(x+7)}-\frac{1-x}{x+7}=$
$=\frac{1}{2(x+7)}-\frac{2(1-x)}{2(x+7)}=\frac{1-2+2x}{2(x+7)}=\frac{2x-1}{2(x+7)}$

7.
(a) $D=\mathbb{Q}\setminus\{-3;0\}$
$\frac{2}{x}-\frac{x}{x+3}=-1 \quad |\cdot x(x+3)$
$2(x+3)-x^2=-x(x+3)$
$2x+6-x^2=-x^2-3x$
$5x=-6; \quad x=-1{,}2; \quad L=\{-1{,}2\}$

(b) $\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \quad |\cdot zya$
$ya-za=zy; \qquad ya=zy+za$
$ya=z(y+a); \qquad z=\frac{ya}{y+a}$

8.
$|\Omega|=6\cdot 6\cdot 6=216$, $|A|=6\cdot 5\cdot 4=120$
$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$

9.
$$\begin{array}{lll} I & 2x+5y=2 & |\cdot 8 \\ II & 6x-8y=29 & |\cdot 5 \\ \hline & 46x \qquad =161, \text{ also } x=3{,}5 & \end{array}$$
In I: $2\cdot 3{,}5+5y=2$, also $y=-1$.
$L=\{(3{,}5|-1)\}$

10.
$G_{\text{Prisma}}=9\cdot 2+3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=36$
$V_{\text{Prisma}}=G_{\text{Prisma}}\cdot h=36\cdot 8=288$
$O_{\text{Prisma}}=2G+M=2\cdot 36+(2+4+5+4+5+4+5+2+9)\cdot 8=392$
$V_{\text{Zylinder}}=G_{\text{Zylinder}}\cdot h=16\pi\cdot 8\approx 402$
$G_{\text{Zylinder}}=r^2\pi$, also $16\pi=r^2\pi$, also $r=4$
$O_{\text{Zylinder}}=2G+2r\pi h$
$=2\cdot 16\pi+2\cdot 4\pi\cdot 8\approx 301$
$V_{\text{Prisma}}<V_{\text{Zylinder}}$, aber $O_{\text{Prisma}}>O_{\text{Zylinder}}$.
Dies ergibt sich daraus, dass das Prisma wesentlich „aufgerauter“ ist als der Zylinder.