9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 9
Wurzeln — 01

- Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die **Umkehrung des Quadrierens**. Daher ist z. B.

  $$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5 \qquad \text{und} \qquad \sqrt{5}^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$$

  Da sowohl $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ als auch $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, muss man bei Variablen, deren Vorzeichen nicht bekannt ist, Betragsstriche setzen: $\sqrt{a^2} = |a|$.

  (Der Betrag einer Zahl a ist die Zahl a selbst, wenn a nichtnegativ ist, und ist die Gegenzahl $-a$, wenn $a < 0$ ist, z. B. also $|3| = 3$, $|-3| = 3$).

- Allgemein: Entsprechend ist die n**-te Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$, also z. B. $\sqrt[3]{1000} = 10$, denn $10^3 = 1000$.

- **Definitionsbereich:**

  Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen, d. h. der Radikand muss ≥ 0 sein.

  Bei $\sqrt{x}$ muss also $x \geq 0$ sein,
  bei $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$ muss $x + 5 > 0$ sein (wegen des Nenners hier $>$ statt $\geq$), d. h. $x > -5$.

- **Rechenregeln**

  Produkte und Quotienten/Brüche dürfen unter einer Wurzel zusammengefasst werden:

  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$, $\qquad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\qquad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}} = \sqrt{\frac{ab}{ac}} = \sqrt{\frac{b}{c}}$

- **Teilweise radizieren**

  Man sucht unter der Wurzel quadratische Faktoren und zieht daraus die Wurzel:

  $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

  $\sqrt{ab^2c^7} = \sqrt{ab^2c^6c} = bc^3\sqrt{ac}$ (für $a, b, c \geq 0$, sonst $|bc^3|$ mit Betrag!)

  $\sqrt{9x^2 - 36} = \sqrt{9(x^2 - 4)} = 3\sqrt{x^2 - 4}$ (keine weitere Vereinfachung möglich!)

  Umgekehrt: Vor der Wurzel stehende Faktoren werden quadratisch in die Wurzel hineingezogen: $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$

- **Rationalmachen des Nenners durch Erweitern:**

  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Erweitern mit $\sqrt{3}$)

- **Schreibweise mit Potenzen:**

  $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ (Brüche im Exponenten sagen: „Ich bin eine Wurzel")

  $x^{\frac{3}{2}} = (x^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}$
  oder $x^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ oder $x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$

  Umgekehrt lassen sich Wurzeln oft bequemer als Potenzen weiterverarbeiten, z. B. $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^0 = 1$

- **Vorsicht: Bei Summen oder Differenzen die Wurzeln nicht einzeln ziehen:**

  Beispiel: $\sqrt{25 - 16}$ ist nicht gleich $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ (links: $\sqrt{9} = 3$, rechts: $5 - 4 = 1$).

  Sondern: Ausdrücke wie $\sqrt{a^2 - b^2}$ oder $\sqrt{c + d}$ können nicht vereinfacht werden.

- **Vorsicht: Nicht in eine Wurzel hineinkürzen:** Beispiel: $\frac{\sqrt{12}}{2}$ ist nicht $\sqrt{6}$.

  Sondern: Teilweise radizieren, falls möglich: $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, oder den Nenner quadratisch in die Wurzel hineinziehen: $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 12} = \sqrt{3}$.