Grundwissen weitere Themen (alter LP) — W
Wendepunkte — 11

Extrema
Kandidaten für Extrema sind **Stellen mit waagrechter Tangente**, also Stellen mit Steigung 0. Zu Lösen ist also die Gleichung

(1) $$f'(x) = 0.$$

Dies allein reicht jedoch nicht aus, da hinzukommen muss, dass das Vorzeichen der Steigung wechselt (von steigend auf fallend oder umgekehrt). Hierzu:

- Verwendung der „Methode mit dem Strich“, d. h. Ermittlung der Vorzeichenbereiche von f' (→ Grundwissen 10/7):

  In einem Bereich mit $f' > 0$ steigt der Graph streng monoton, bei $f' < 0$ fällt er. Auf diese Weise hat man gleichzeitig die **Monotonie**bereiche.
  Bei einem Wechsel steigend–fallend hat man ein Maximum, bei einem Wechsel fallend–steigend ein Minimum. Bei gleichem Steigungsverhalten liegt ein **Terrassenpunkt** vor, d. h. ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

- Verwendung der zweiten Ableitung f'':

  Die in (1) ermittelten x-Werte setzt man in $f''(x)$ ein. Ist dann an einer solchen Stelle $f''(x) > 0$, so ist dort der Graph linksgekrümmt, d. h. es handelt sich um ein Minimum, bei $f''(x) < 0$ entsprechend um ein Maximum.
  Ist an einer solchen Stelle $f''(x) = 0$, so ist obige Vorzeichenmethode besser geeignet zur Entscheidung, ob es sich um Maxiumum, Minimum oder Terrassenpunkt handelt.

Wendepunkte
Kandidaten für Wendepunkte sind Stellen mit

(2) $$f''(x) = 0,$$

so genannte **Flachpunkte**.
Dies allein reicht jedoch wieder nicht aus, da hinzukommen muss, dass das Vorzeichen der Krümmung wechselt (von links- auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt). Hierzu:

- Verwendung der „Methode mit dem Strich“, d. h. Ermittlung der Vorzeichenbereiche von f'':

  In einem Bereich mit $f'' > 0$ ist der Graph linksgekrümmt (Merkbeispiel: Standardparabel $f(x) = x^2$), bei $f'' < 0$ rechtsgekrümmt. Auf diese Weise hat man gleichzeitig die **Krümmung**.

- Verwendung der dritten Ableitung f''':

  Die in (2) ermittelten x-Werte setzt man in $f'''(x)$ ein. Ist dann an einer solchen Stelle $f'''(x) \neq 0$, so handelt es sich um einen Wendepunkt.
  Ist $f'''(x) = 0$, so ist obige Vorzeichenmethode besser geeignet.

Unter einer **Wendetangente** versteht man die Tangente im Wendepunkt.

Beispiele (nachrechnen!):

1. $f(x) = 2x^4 - x$. Bei $x = \frac{1}{2}$ liegt ein Minimum, bei $x = 0$ ein Flachpunkt vor.
2. $f(x) = -x^4 + 2x^3$. Bei $x = \frac{3}{2}$ liegt ein Maximum vor; bei $x = 0$ und $x = 1$ befinden sich Wendepunkte, wobei $(0|0)$ sogar ein Terrassenpunkt ist. Die Wendetangente im Punkt $(1|1)$ hat die Gleichung $y = 2x - 1$.
3. $f(x) = x^4$. Bei $x = 0$ befindet sich Minimum und Flachpunkt.