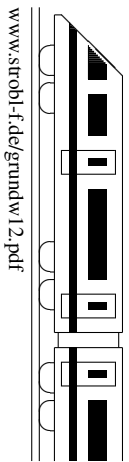


Grundwissen weitere Themen (alter LP)	W
Kombinatorik	12



Kombinatorik = Abzählen von Mengen

Beispiele → grundw12.pdf

Allgemein und fundamental ist das folgende

Zählprinzip (Produktregel, Multiplikationsprinzip)

Ein Versuch wird in k Stufen durchgeführt. Auf der 1. Stufe gebe es n_1 mögliche Ergebnisse, auf der 2. Stufe jeweils¹ n_2 mögliche Ergebnisse, ..., auf der k -ten Stufe jeweils¹ n_k mögliche Ergebnisse.

Dann gibt es bei dem Versuch insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ mögliche Ergebnisse.

In vielen Fällen geht es darum, „Objekte“ auf „Zellen“ zu verteilen oder aus eine „Urne“ eine „Stichprobe“ zu ziehen. Dabei ist darauf zu achten, ob es in dieser Stichprobe auf die Reihenfolge ankommt oder nicht (geordnet/ungeordnet) und ob Elemente darin mehrfach vorkommen dürfen oder nicht (mit/ohne Wiederholung).²

Geordnete Stichproben mit Wiederholung (k -Tupel)

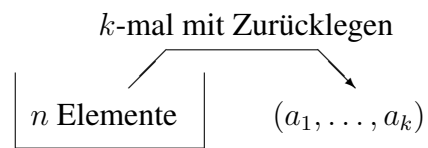
Es gibt

$$n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n \quad (k \text{ Faktoren})$$

k -Tupel aus einer n -elementigen Menge.

Andere Sichtweise:

Es gibt n^k Möglichkeiten, k verschiedene Objekte auf n Zellen zu verteilen (wobei die Zellen auch mehrere Objekte erhalten dürfen).³



Geordnete Stichproben ohne Wiederholung (k -Permutationen)

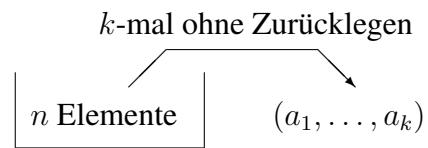
Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

k -Permutationen aus einer n -elementigen Menge.

Andere Sichtweise:

Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, k verschiedene Objekte auf n Zellen so zu verteilen, dass jede Zelle höchstens ein Objekt erhält.³



Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung (k -Teilmengen)

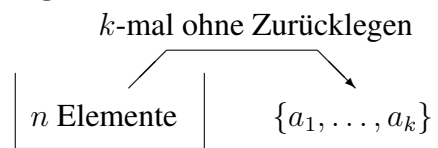
Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (,k \text{ aus } n\text{‘‘})$$

k -Teilmengen aus einer n -elementigen Menge.

Andere Sichtweise:

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k ununterscheidbare Objekte auf n Zellen so zu verteilen, dass jede Zelle höchstens ein Objekt erhält.⁴



Tricks:

Manchmal muss man die gesuchte Menge zerlegen in zwei disjunkte⁵ Mengen und deren Anzahlen bestimmen.

Manchmal (z. B. „enthält mindestens ein ...“) ist der Weg über das Komplement („enthält kein ...“) bequem.

Manchmal ist die Anzahl so klein, dass man alles systematisch hinschreiben kann.

¹Unabhängig vom Ausgang der vorhergehenden Stufen.

²Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung → Leistungskurs.

³Wir denken uns: Jedes Objekt wählt seine Zellennummer.

⁴Wir denken uns: Es wird ausgewählt, welche Zellen ein Objekt erhalten.

⁵Keine gemeinsamen Elemente.