Grundwissen weitere Themen	W
Potenzen	**17**

- Bedeutung: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Stück Faktoren}}$, also z. B. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

  Negative Exponenten sagen „Ich stehe im Nenner“: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, also z. B. $7^{-1} = \frac{1}{7}$

  Brüche im Exponenten sagen „Ich bin eine Wurzel“: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, also z. B. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- Rechenregeln:

  Multiplikation/Division bei gleicher Basis: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\quad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

  Multiplikation/Division bei gleichem Exponenten: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

  Potenzen potenzieren heißt Exponenten multiplizieren: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Bei negativer Basis muss der Exponent ganzzahlig sein, und bei geradem Exponenten wird das Ergebnis positiv, bei ungeradem Exponenten negativ. Beispiele:
  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, $(-2)^4 = \ldots = +16$, $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{32}$.
  $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ ist nicht definiert.
  Lösung von $x^3 = -2$: Statt $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}$ sollte man besser $-2^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}$ schreiben.
- Häufige Fehler: Für Summen/Differenzen gibt es keine solchen Regeln.

  Sondern je nach Situation:
  Bei Quadraten binomische Formeln verwenden, z. B. $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$;
  bei höheren Exponenten eventuell ausmultiplizieren, z. B.
  $$\begin{aligned} (x-4)^3 &= (x-4)(x-4)(x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = \\ &= x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$
  (oder die aus dem Pascalschen Dreieck bekannte 1-3-3-1-Formel verwenden:
  $(x-4)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-4) + 3 \cdot x \cdot (-4)^2 + 1 \cdot (-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$;
  gegebenenfalls mit anderen gleichartigen Termgliedern zusammenfassen (z. B. $(4x - 3 - 2x)^7 = (2x-3)^7$); kürzen (aber richtig, z. B. $\frac{(4x-3)^7}{32x-24} = \frac{(4x-3)^7}{8(4x-3)} = \frac{(4x-3)^6}{8}$); ausklammern (z. B. $\frac{(5ax)^3}{(5ax+10)^5} = \frac{5^3a^3x^3}{[5(ax+2)]^5} = \frac{5^3a^3x^3}{5^5(ax+2)^5} = \frac{a^3x^3}{25(ax+2)^5}$); sonst stehen lassen (z. B. $\frac{a^4+b^4}{a+b}$ kann nicht vereinfacht werden).
- Beispiel 1: $\frac{(2x+5)^2-4x^2}{(2x+5)^3}$

  Hier darf mit $2x + 5$ nicht gekürzt werden, da im Zähler eine Differenz steht. Den Nenner $(2x+5)^3$ sollte man so stehen lassen, da der Nenner bereits in faktorisierter Form (also als Produkt $(2x+5) \cdot (2x+5) \cdot (2x+5)$) vorliegt, was für eventuelles späteres Kürzen die günstigere Darstellungsform ist.
  Einzige mögliche Vereinfachung: $\frac{(2x+5)^2-4x^2}{(2x+5)^3} = \frac{4x^2+20x+25-4x^2}{(2x+5)^3} = \frac{20x+25}{(2x+5)^3} = \frac{5(4x+5)}{(2x+5)^3}$.
  Dieses Endergebnis kann nicht gekürzt werden.
- Beispiel 2: $\frac{(2x+5)^2-(x+11)\cdot 2(2x+5)\cdot 2}{(2x+5)^4}$

  Im Zähler wird zunächst $(2x+5)$ als gemeinsamer Faktor ausgeklammert, damit im Zähler ein Produkt steht, in dem man kürzen kann:
  $\frac{(2x+5)^2-(x+11)\cdot 2(2x+5)\cdot 2}{(2x+5)^4} = \frac{(2x+5)[(2x+5)-(x+11)\cdot 2\cdot 2]}{(2x+5)^4} = \frac{(2x+5)[-2x-39]}{(2x+5)(2x+5)(2x+5)(2x+5)} = \frac{-2x-39}{(2x+5)^3}$.
  Geübte können gleich in einem Schritt zu Beginn schon mit $(2x+5)$ kürzen, wenn man in jedes Glied der im Zähler stehenden Differenz kürzt: $\frac{(2x+5)^{\cancel{2}}-(x+11)\cdot 2\cancel{(2x+5)}\cdot 2}{(2x+5)^{\cancel{4}3}}$
- Beispiel 3:
  $$\left(\frac{(3a^5x^3)^2\cdot x^{-8,1}}{9ab^0x^5x^{-7}}\right)^5 = \left(\frac{9a^2x^6x^{-8,1}}{a^4x^{-2}}\right)^5 = \left(\frac{9a^{10}x^{-2,1}}{9a\cdot 1\cdot x^{-2}}\right)^5 = \left(\frac{a^9x^2}{x^{2,1}}\right)^5 = \left(\frac{a^9}{x^{0,1}}\right)^5 = \frac{a^{45}}{x^{0,5}} = \frac{a^{45}}{\sqrt{x}}$$