



Definitionsbereich (maximaler):

Kritisch sind: Brüche: Nenner gleich 0 setzen, liefert Definitionslücken;

Wurzeln: Radikand ≥ 0 setzen, liefert Definitionsbereich.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10}$. Nenner $10x^2 - 10 = 0$ liefert $x_{1/2} = \pm 1$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Grenzwerte im Unendlichen (d. h. bei sehr großen x -Werten):

Vielen Funktionstermen sieht man das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ direkt an: So ist bei Polynomen die höchste Potenz (und deren Koeffizient) bestimmend, Exponentialfunktionen mit Basis $a > 1$ wachsen für $x \rightarrow +\infty$ ins Unendliche, Exponentialfunktionen mit Basis $a < 1$ nähern sich der x -Achse und Brüche mit unendlich großem Nenner gehen gegen 0.

Beispiele:

Für $h_1(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ gilt (wegen „ $x^{4\cdot}$ “) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) \rightarrow +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) \rightarrow +\infty$.

Für $h_2(x) = -0,1x^3 + 16$ gilt (wegen „ $-x^{3\cdot}$ “) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_2(x) \rightarrow +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_2(x) \rightarrow -\infty$.

Für $h_3(x) = 1,04^x - 3$ gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_3(x) = -3$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_3(x) \rightarrow +\infty$.

Für $h_4(x) = -\frac{4}{x-1}$ gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_4(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_4(x) = 0$.

Bei Bruchfunktionen bietet sich an, mit der höchsten Potenz des Nenners zu kürzen.

Beispiele:

- $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10}$. Mit x^2 kürzen, d. h. Zähler und Nenner durch x^2 dividieren:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}}{10 - \frac{10}{x^2}}$$

Hier erkennt man nun, dass bei Einsetzen sehr großer x -Werte $\frac{16}{x^2}$ und $\frac{10}{x^2}$ gegen 0 gehen, so dass am verbleibenden Term das Verhalten für sehr große x -Werte bequem sichtbar ist:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 8}{10} \rightarrow \infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x-1}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{4}{5}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x-1}{5x^3+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{3}{x^3}} = 0$.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y -Achse, falls $f(-x) = f(x)$

Beispiele:

$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10}$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 8(-x)^2 + 16}{10(-x)^2 - 10} = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10} = f(x).$$

$h_5(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

$$h_5(-x) = \frac{(-x)^3 - 4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + 4x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1} = -h_5(x).$$

Falls Symmetrie vorliegt, erleichtert dies später oft die Arbeit, z. B. beim Berechnen von Funktionswerten.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt einer Funktion f mit der y -Achse: Berechnung von $f(0)$.

Schnittpunkte mit der x -Achse (Nullstellen): Lösung der Gleichung $f(x) = 0$;

Beispiel: $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10}$.

Nullstellen: $f(x) = 0: \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10} = 0; x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; binomische Formeln: $(x^2 - 4)^2 = 0$;

$[(x+2)(x-2)]^2 = 0; x_{1/2} = -2$ (doppelt), $x_{3/4} = 2$ (doppelt). Somit $N_{1/2}(-2|0), N_{3/4}(2|0)$.

Schnitt mit y -Achse: $f(0) = \frac{0^4 - 8 \cdot 0^2 + 16}{10 \cdot 0^2 - 10} = \frac{16}{-10} = -1,6$, also $Y(0 | -1,6)$.

Für eine Skizze des Funktionsgraphen liefern diese Eigenschaften wertvolle Anhaltspunkte

Beispiel: $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{10x^2 - 10}$

Der Skizze kann entnommen werden: f fällt für $x \in]-\infty; -2[$, steigt dann in $]-2; -1[$ und $]-1; 0[$, fällt in $]0; 1[$ und $]1; 2[$ und steigt dann wieder in $]2; \infty[$.

