

Unter dem Betrag einer Zahl a versteht man a selbst, wenn a nicht negativ ist, z. B. $|5| = 5$, und die Gegenzahl von a , wenn a negativ ist, z. B. $|-5| = 5$; formal kann man die Gegenzahl von a schreiben als $-a$; Beispiel: Ist $a = -8$ (in dem Buchstaben a steckt also das „-“ mit drin!), so ist $-a = -(-8) = +8$.

Wenn man nicht weiß, ob das, was in Betragsstrichen steht, positiv oder negativ ist (weil Variablen vorkommen), benötigen wir eine Fallunterscheidung.

Merke:

Wenn Beträge vorkommen, dann:

1. Fall: „Was im Betrag steht“ ≥ 0 :

Dann Betragsstriche weglassen (und durch runde Klammern ersetzen)

2. Fall: „Was im Betrag steht“ < 0 :

Dann Betragsstriche durch runde Klammern ersetzen und davor

Vorzeichen ändern

Beispiel: $3 - |2x - 1|$

Schreibe zuerst Fallunterscheidung ...

... dann Betragsstriche auflösen ...

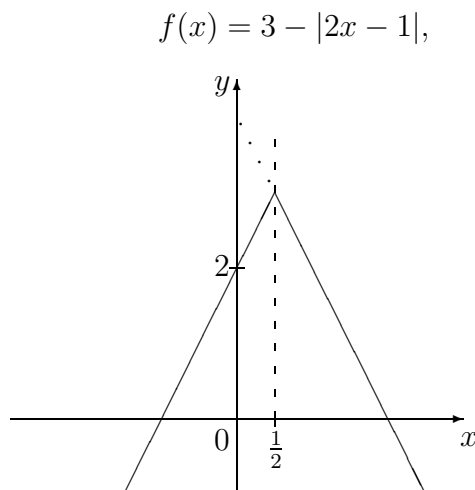
$$3 - |2x - 1| = \begin{cases} 3 - (2x - 1) & \text{falls } 2x - 1 \geq 0 \\ 3 + (2x - 1) & \text{falls } 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

... dann äquivalent umformen:

$$= \begin{cases} 4 - 2x & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ 2 + 2x & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Je nach Aufgabenstellung kann man auf diese Weise jetzt z. B. ...

... Funktionsgraphen zeichnen,
z. B. zum Funktionsterm



... oder Gleichungen lösen, z. B.

$$3 - |2x - 1| = -6x$$

Fall 1: $2x - 1 \geq 0$, d. h. $x \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} 3 - (2x - 1) &= -6x \\ 4 - 2x &= -6x \\ x &= -1 \quad \swarrow \text{wegen} \end{aligned}$$

Fall 2: $2x - 1 < 0$, d. h. $x < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} 3 + (2x - 1) &= -6x \\ 2 + 2x &= -6x \\ x &= -\frac{1}{4} \quad \text{passt!} \end{aligned}$$

Somit: $L = \{-\frac{1}{4}\}$

Etwas einfacher geht es bei Gleichungen vom Typ $|2x - 1| = 5$, wenn auf der rechten Seite nur eine Zahl (keine Variable) steht; dann überlegt man: $|2x - 1|$ kann 5 sein, wenn

$$2x - 1 = 5 \quad \text{oder} \quad 2x - 1 = -5 \quad \text{gilt, also ... } L = \{3; -2\}.$$

Ebenso sieht man sofort: Die Gleichung $|2x - 1| = -5$ hat als Lösungsmenge die leere Menge: $L = \{\}$, da Beträge nie negativ sein können.