Grundwissen weitere Themen (alter LP) — W
Gleichungen mit Parametern — 04

In solchen Gleichungen steht x meist für die Lösungsvariable; weitere vorkommende Buchstaben sind so genannte Parameter, die als Platzhalter für Zahlen stehen.
Beim Lösen solcher Gleichungen gelten zunächst die üblichen Regeln. Besonders zu beachten ist jedoch:

- Bei **linearen Gleichungen** bringe man wie üblich alle Stücke mit x auf die eine und den Rest auf die andere Seite; anschließend klammert man x aus.

  Beispiel:
  $$\begin{aligned} 4-ax &= a-7x \\ 7x-ax &= a-4 \\ (7-a)x &= a-4 \end{aligned}$$

- Da nicht durch 0 dividiert werden darf, ist vor dem Dividieren nun stets eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Beispiel:

  (1) $$(7-a)x = a-4$$

  Fall 1: $7-a \neq 0$
  Dann darf durch $(7-a)$ dividiert werden und man erhält
  $$\begin{aligned} x &= \frac{a-4}{7-a} \\ L &= \left\{\frac{a-4}{7-a}\right\} \end{aligned}$$

  Fall 2: $7-a=0$, d. h. a=7:
  In diesem Fall lautet die Gleichung (1):
  $$\begin{aligned} 0\cdot x &= 7-4 \\ 0 &= 3 \\ L &= \{\} \end{aligned}$$

Beispiel einer **Bruchgleichung** mit Parameter k:

$$\frac{x}{x-k}+\frac{x}{2x+k}=1{,}5$$

Definitionsmenge[1]: $\mathbb{Q}\setminus\{k; -\frac{k}{2}\}$
Nach Durchmultiplizieren dieser Gleichung mit dem Hauptnenner $(x-k)(2x+k)$ folgt:

$$\begin{aligned} x(2x+k)+x(x-k) &= 1{,}5(x-k)(2x+k) \\ 2x^2+kx+x^2-kx &= 3x^2+1{,}5kx-3kx-1{,}5k^2 \\ 1{,}5kx &= -1{,}5k^2 \\ kx &= -k^2 \end{aligned}$$ (2)

Fall 1: $k \neq 0$
In diesem Fall darf Gleichung (2) durch k dividiert werden; es folgt

$$x=-\frac{k^2}{k}=-k, \quad \text{also } L=\{-k\}$$

(An dieser Stelle blickt man nochmals zurück auf die Definitionsmenge und stellt fest, dass $-k$ nicht verboten ist).

Fall 2: $k=0$
In diesem Fall lautet Gleichung (2):

$$\begin{aligned} 0\cdot x &= -0^2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung stets wahr ist, dürfen in obiger Gleichung alle Werte für x eingesetzt werden außer den verbotenen Werten k und $-\frac{k}{2}$, d. h. $L=D=\mathbb{Q}\setminus\{k; -\frac{k}{2}\}$. Da $k=0$ ist, kann die Lösungsmenge in diesem Fall geschrieben werden als $L=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

[1] In einer Nebenrechnung oder im Kopf jeweils Nenner gleich 0 setzen!