Grundwissen weitere Themen (alter LP) W
Satz von Vieta. Quadratische Ungleichungen 05

Satz von Vieta

Gelingt es, eine in Normalform gegebene quadratische Gleichung $x^2+bx+c=0$ auf die Form $(x-r)(x-s)=0$ zu bringen, so sind $x_1=r$ und $x_2=s$ die Lösungen der Gleichung (denn ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist).
Bei umgekehrtem Ausmultiplizieren erkennt man: $(x-r)(x-s)=x^2-sx-rx+rs=x^2-(s+r)x+rs$.
Also ist (1) die Konstante $c=rs$ das Produkt der zwei Lösungen und
(2) $b=-(r+s)$ die negative Summe der zwei Lösungen.
Mit diesem Vorwissen kann man manchmal die Lösungen schnell sehen.
Beispiel: $x^2-5x-14=0$. Da -14 nur auf vier Arten als Produkt natürlicher Zahlen darstellbar ist (nämlich $(-14)\cdot 1$, $14\cdot(-1)$, $(-7)\cdot 2$ und $7\cdot(-2)$), und nur eine davon die Eigenschaft (2) hat, nämlich $7+(-2)=5$, sind $x_1=7$ und $x_2=-2$ Lösungen der quadratischen Gleichung.

Wichtig ist das umgekehrte **Faktorisieren**:
Hat man für die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ z. B. mit der Formel die Lösungen $x_1=r$ und $x_2=s$ gefunden, so ist $ax^2+bx+c=a(x-r)(x-s)$ („x minus Lösung“).
Dies kann z. B. zum Kürzen von Bruchtermen verwendet werden. Beispiel: $\frac{x^2+5x-24}{5x^2+80x+320}$
Zähler: $x^2+5x-24=0$ liefert $x_1=3$, $x_2=-8$ und damit $x^2+5x-24=(x-3)(x-(-8))$;
Nenner: $5x^2+80x+320=0$ liefert $x_{1/2}=-8$ (doppelte Lösung), also $5x^2+40x+80=5(x-(-8))(x-(-8))=5(x+8)^2$.
Insgesamt: $\frac{x^2+5x-24}{5x^2+80x+320}=\frac{(x-3)(x+8)}{5(x+8)^2}=\frac{x-3}{5(x+8)}$

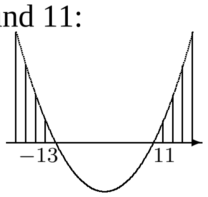
Quadratische Ungleichungen

Bequem ist meist folgendes Verfahren:

1. Man löse zunächst die quadratische Ungl. nach 0 auf, d. h. bringe alles auf eine Seite.
2. Man bestimme die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung.
3. Man denke sich den Graphen der zugehörigen quadratischen Funktion (Nach oben oder nach unten geöffnet? Die gerade berechneten Lösungen sind die Nullstellen!)
4. Man bestimme mit Hilfe einer Grobskizze die Lösungsmenge der Ungleichung.

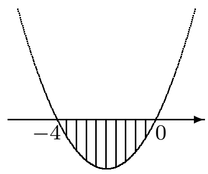
Beispiele:

$x^2+2x>143$
$x^2+2x-143>0$
Die zugehörige qu. Gl. $x^2+2x-143=0$ hat die Lösungen $x_1=-13$, $x_2=11$.
Zum Term $x^2+2x-143$ gehört eine nach oben geöffnete Parabel mit Nullstellen -13 und 11:



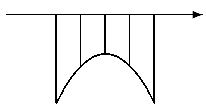
Gesucht sind in obiger Ungleichung die x-Werte, für die die Funktionswerte $x^2+2x-143>0$ sind, also oberhalb der x-Achse sind.
Der Skizze entnimmt man:
$L=]-\infty;-13[\cup]11;\infty[$

$x^2+4x\leq 0$
Die zugehörige qu. Gleichung $x^2+4x=0$ hat die Lösungen $x_1=-4$, $x_2=0$.
Zum Term x^2+4x gehört eine nach oben geöffnete Parabel mit Nullstellen -4 und 0:



Gesucht sind in obiger Ungleichung die x-Werte, für die die Funktionswerte $x^2+4x\leq 0$ sind, also unterhalb (oder auf) der x-Achse sind.
Der Skizze entnimmt man:
$L=[-4;0]$

$-4x^2+8x-20<0$
Die zugehörige qu. Gleichung $-4x^2+8x-20=0$ hat keine Lösungen.
Zum Term $-4x^2+8x-20$ gehört eine nach unten geöffnete Parabel ohne Nullstellen:



Gesucht sind in obiger Ungleichung die x-Werte, für die die Funktionswerte $-4x^2+8x-20<0$ sind, also unterhalb der x-Achse sind.
Der Skizze entnimmt man nun, dass dies für alle x-Werte der Fall ist: $L=\mathbb{R}$