



Regel von de l'Hospital:

Sind u und v in den jeweiligen Bereichen differenzierbare Funktionen und ist

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$$

(liegt also die Situation $\frac{0}{0}$ vor), so ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)},$$

sofern der letztere Grenzwert existiert.

Der Satz gilt auch in der Situation $\frac{\infty}{\infty}$, auch für $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ und auch, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)} \rightarrow \pm\infty$ geht.¹

Beispiele:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ $\left[\frac{0}{0} \right]$

- $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{2x^2-8x+8} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{4x-8} = \frac{1}{+0} \rightarrow \infty$ $\left[\frac{0}{0} \right]$

- Mehrmalige Anwendung des Satzes ist möglich:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$
 $\left[\frac{0}{0} \right]$

- Bei Differenzen mit der Situation $\infty - \infty$ kann man versuchen, durch geschicktes Umformen einen Bruch-Ausdruck herzustellen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \dots = 0$$

- Bei Produkten mit der Situation $\infty \cdot 0$ kann es sinnvoll sein, diese als Bruch zu schreiben (Kehrbruch im Nenner) und so die Situation $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zu erhalten. Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (1 - \cos \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$
 $\left[\frac{0}{0} \right]$

- In der 12. Klasse lernen Sie eine Funktion \ln kennen mit $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \rightarrow -\infty$ und Ableitung $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Hierfür gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-1} = 0$$
 $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Weitere Grenzwerte mit der \ln - und e -Funktion (12. Klasse) sowie Formulierung der L'Hospital'schen Regeln siehe Formelsammlung² Seite 55 sowie 59–60.

¹Die Bedingung „sofern der letztere Grenzwert existiert“ ist wesentlich, wie das folgende Beispiel (Situation $\frac{\infty}{\infty}$) zeigt: Mit $u(x) = x + \sin x$ und $v(x) = 3x$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{\sin x}{3x} \right) = \frac{1}{3}$, der Grenzwert existiert also und ist gleich $\frac{1}{3}$; jedoch existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{3}$ nicht.

²Barth, Mühlbauer, Nikol, Wörle, Mathematische Formeln und Definitionen, München, bsv/Lindauer, 1994.