Grundwissen weitere Themen (alter LP) — W
Kurvendiskussion: Theorie — 08

Merkspruch: DASNEW

Musteraufgabe → Grundwissen W/9

Ziel: Zu einem gegebenen Funktionsterm $f(x)$ sollen möglichst viele charakteristische Eigenschaften des Funktionsgraphen gefunden werden.

Definitionsbereich (maximaler): Kritisch sind:
Brüche: Nenner gleich 0 setzen, liefert Definitionslücken
Wurzeln: Radikand ≥ 0 setzen, liefert Definitionsbereich
Logarithmen: Numerus > 0 setzen, liefert Definitionsbereich

Asymptoten kann es an den Rändern des Definitionsbereichs geben, d. h. zu bilden sind $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (waagrechte Asymptoten) bzw. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (senkrechte Asymptoten an den Definitionslücken).
Für $\lim\limits_{x\to x_0}$ siehe Grundwissen 11/1, für $\lim\limits_{x\to\infty}$ kann man mit der höchsten Potenz des Nenners kürzen (siehe Musteraufgabe Grundwissen W/9).
Deneben kann es bei gebrochen rationalen Funktionen noch schräge Asymptoten geben, wenn der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad; man bestimmt die Gleichung der schrägen Asymptote meist durch Polynomdivision.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$
Falls Symmetrie vorliegt, erleichtert dies später oft die Arbeit, z. B. beim Berechnen von Funktionswerten.

Nullstellen sind Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

Exrema und Monotonie: $f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f' ermitteln („Methode mit dem Strich“ siehe Grundwissen 10/7, dabei auch Definitionslücken markieren).
$f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.
Dazwischen je nach Situation: Definitionslücke, Maximum (steigt-fällt), Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt).
Die y-Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in den Original-Funktionsterm f(x) ganz oben.

Wendepunkte und Krümmung: $f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Wiederum Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln.
$f''(x) > 0$: Graph linksgekrümmt in diesem Bereich; $f''(x) < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen je nach Situation: Definitionslücke, Wendepunkt (bei Wechsel der Krümmung), Flachpunkt.
y-Koordinaten wie oben.

Skizze: Der Graph kann nun anhand der bisherigen Daten skizziert werden. Auch wenn man einzelne Teile der Kurvendiskussion nicht bearbeiten konnte, ist eine Skizze mit Hilfe einer Wertetabelle stets möglich! Für einige x-Werte (z. B. 0 oder ± 1) ist die Berechnung von f(x) ganz einfach; dies sollte auf jeden Fall durchgeführt werden (bei $x = 0$ erhält man den Schnittpunkt mit der y-Achse; Vorsicht: Nicht Verrechnen beim Einsetzen negativer x-Werte!).

Wertebereich: Dieser kann mit Hilfe der Skizze leicht bestimmt werden, indem man betrachtet, welche y-Werte beim Graphen vorkommen können (hält man das Lineal parallel zur x-Achse und schiebt man es von unten nach oben durch, so sieht man, welche dieser Parallelen vom Graphen geschnitten wird und welche y-Werte somit vorkommen).