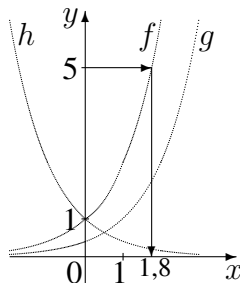




10. Klasse Lösungen	10
Exponential- und Logarithmusfunktion	03

1. x	-1	0	1
$f(x)$	0,4	1	2,5
$g(x)$	0,16	0,4	1
$h(x)$	2,5	1	0,4

Graphische Lösung
von $2,5^x = 5$ ergibt
 $x \approx 1,8$.



g ist gegenüber f um eine Einheit nach rechts verschoben, bzw. wegen $g(x) = 2,5^x \cdot 2,5^{-1} = 0,4 \cdot 2,5^x$ mit dem Faktor 0,4 in y -Richtung gestaucht.

h ist gegenüber f an der y -Achse gespiegelt, denn $h(x) = (\frac{2}{5})^x = (\frac{5}{2})^{-x} = 2,5^{-x} = f(-x)$.

2. (a) $f(1996) = 313 = 84a^6$, also $a = \sqrt[6]{\frac{313}{84}} = (\frac{313}{84})^{\frac{1}{6}} \approx 1,25$, d. h. +25 % pro Jahr.
 $f(1984) = 84a^{-6} \approx 22$ passt; $f(2002) = 84a^{12} \approx 1200$ passt nicht.
 Da sich a^x für $x \rightarrow -\infty$ nur asymptotisch der 0 nähert, aber stets > 0 ist, lag die Fläche 0 ha zu keinem Zeitpunkt vor.
- (b) Mit $x = \text{Zeit in Sekunden}$ ist $f(x) = 20\,000 \cdot (\frac{1}{10})^{\frac{x}{183}}$ [oder Ansatz $f(x) = 20\,000 \cdot a^x$ liefert $f(183) = \frac{1}{10} \cdot 20\,000$, also $a^{183} = \frac{1}{10}$, $a = \sqrt[183]{0,1} \approx 0,9875$].
 Die Halbwertszeit x folgt aus $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 20\,000$, also $(\frac{1}{10})^{\frac{x}{183}} = 0,5$. Beidseitiges Logarithmieren liefert $\log 0,1^{\frac{x}{183}} = \log 0,5$, also $\frac{x}{183} \cdot \log 0,1 = \log 0,5$, also $x = \frac{\log 0,5}{\log 0,1} \cdot 183 \approx 55$. Die Halbwertszeit beträgt also ca. 55 s.
- (c) Lineare Abnahme pro Tag um $\frac{18\,000}{183} \approx 98$ Stück, also $f(x) = 20\,000 - \frac{18\,000}{183}x$.
3. (a) $\dots = \log_3(3^4) = 4 \log_3(3) = 4$ (b) $\dots = \log_a(a^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \log_a(a) = \frac{1}{3}$
 (c) $\dots = \log_3(3^2) + \log_3(a^3) + \log_3(b) = 2 + 3 \log_3(a) + \log_3(b)$
 (d) $\dots = \log_{10}((10 + \frac{1}{a})(10 - \frac{1}{a})) = \log_{10}(10 + \frac{1}{a}) + \log_{10}(10 - \frac{1}{a})$
 (e) $\dots = \frac{\log_{10}(0,50)}{\log_{10}(3)} \approx -0,63$ (Weitere Vereinfachung bei (d) nicht möglich!)
4. (a) $1,05^x = 10$; $\log 1,05^x = \log 10$; $x \log 1,05 = \log 10$; $x = \frac{\log 10}{\log 1,05} \approx 47,2$
 (b) $7 \cdot 6^{5x-4} - 3 = 2$; $6^{5x-4} = \frac{5}{7}$; $\log 6^{5x-4} = \log \frac{5}{7}$; $(5x - 4) \log 6 = \log \frac{5}{7}$;
 $x = (\frac{\log \frac{5}{7}}{\log 6} + 4) : 5 \approx 0,762$
 (c) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} = 36$; $2 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^x = 36$; $(2 + \frac{5}{2})2^x = 36$; $2^x = 8$; $x = 3$
 (d) $3^{x+1} = 5 \cdot 4^{x-1}$; $\log 3^{x+1} = \log(5 \cdot 4^{x-1})$; $(x+1) \log 3 = \log 5 + (x-1) \log 4$;
 $(\log 3 - \log 4)x = \log 5 - \log 4 - \log 3$; $x = \frac{\log 5 - \log 4 - \log 3}{\log 3 - \log 4} \approx 3,04$
 (e) Umformung $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ und Substitution $u = 3^x$ liefern:
 $u^2 - 12u + 27 = 0$; $u_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1}$, also $u_1 = 3$, $u_2 = 9$.
 Rücksubstitution: $3^x = 3$ oder $3^x = 9$, somit $x = 1$ oder $x = 2$.
5. (a) Für den Abstand zwischen 1 und 10 misst man ca. 2,1 cm, also gilt für die gesuchte Basis b : $\log_b 10 - \log_b 1 = 2,1$, also $\log_b 10 = 2,1$. Somit $b^{2,1} = 10$, also $b = \frac{\log 10}{\log 2,1} \approx 3$. $2,1 \xrightarrow{b^{\dots}} 10$
 $\xleftarrow{\log_b \dots}$
- (b) Von 1 Euro bis K1 misst man ca. 13,2 cm, also ist $\log_3 x = 13,2$.
 Somit $x = 3^{13,2} \approx 2 \cdot 10^6$. (Tatsächlich betrug der Gewinn 1,87 Millionen Euro). $13,2 \xrightarrow{3^{\dots}} x$
 $\xleftarrow{\log_3 \dots}$
- (c) Mit $k_i = \text{Gewinn in Gewinnklasse } i$ ist $\log_3(k_4) - \log_3(k_5) = \log_3(k_5) - \log_3(k_6)$, also $\log_3(\frac{k_4}{k_5}) = \log_3(\frac{k_5}{k_6})$ und somit $\frac{k_4}{k_5} = \frac{k_5}{k_6}$, d. h. gleiche Verhältnisse, d. h. die Gewinne vervielfachen sich von Gewinnklasse zu Gewinnklasse jeweils mit dem gleichen Faktor; es ist $k_6 = 7$, $k_5 = 70$, $k_4 = 700$, $k_3 = 7000$ usw.