

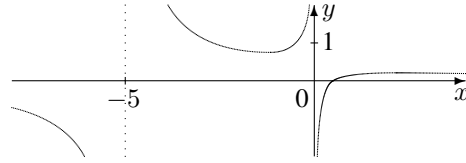


<b>11. Klasse Lösungen (alter LP)</b>	<b>11</b>
<b>Gebrochen-rationale Funktionen, <math>\lim x \rightarrow x_0</math></b>	<b>01</b>

1. Faktorisieren:  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+5x} = \frac{2(x-0,5)}{x(x+5)}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x) = \frac{-1}{(\pm 0) \cdot 5} \rightarrow \mp \infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -5 \pm 0} f(x) = \frac{-11}{(-5) \cdot (\pm 0)} \rightarrow \pm \infty$ .



2. Bei einer Polstelle ungerader Vielfachheit erhält man einen Vorzeichenwechsel (Vzw); bei gerader Vielfachheit liegt bei Annäherung von links und von rechts das gleiche Vorzeichen vor. Definitionslücke ist in allen gegebenen Beispielen  $x = -3$ .

(a)  $f(x) = \frac{-x^2}{3(x+3)^2}$ . Polstelle 2. Ordnung, kein Vzw.  $\lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} f(x) = \frac{-9}{+0} \rightarrow -\infty$

(b)  $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^3}$ . Polstelle 3. Ordnung, Vzw.  $\lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} f(x) = \frac{\pm 9}{\pm 0} \rightarrow \pm \infty$

(c)  $f(x) = \frac{(2+x)(2-x)}{(x+3)(x^2-3x+9)}$ . Polstelle 1. Ordnung, Vzw.  $\lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} f(x) = \frac{-5}{\pm 0} \rightarrow \mp \infty$

Damit ergibt sich: Abbildung A ist  $f_1$ , B ist  $f_2$ , C ist  $f_3$ .

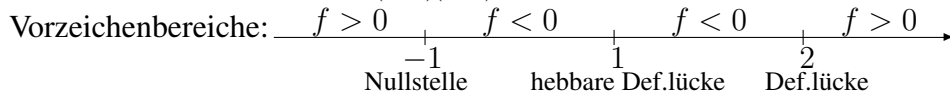
3. Direkt mit Faktorisieren:  $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{2(x+1)}$ .  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \frac{(1 \pm 0)^2}{2 \cdot (1 \pm 0 + 1)} = \frac{1}{4}$ .

$h$ -Methode ohne Faktorisieren:  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 \pm h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 \pm h)^3 - (1 \pm h)^2}{2(1 \pm h)^2 - 2} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 \pm 3h + 3h^2 \pm h^3 - 1 \mp 2h - h^2}{2(1 \pm 2h + h^2) - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\pm 1 + 2h \pm h^2)}{h(\pm 4 + 2h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pm 1 + 2h \pm h^2}{\pm 4 + 2h} = \frac{\pm 1}{\pm 4} = \frac{1}{4}$ .

4. Definitionslücken:  $x^2 - 3x + 2 = 0$  ergibt  $x_1 = 2, x_2 = 1$ .

Faktorierte Form:  $f(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2(x+1)}{x-2}$ .



$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 \pm h)^2 - 2}{(1 \pm h)^2 - 3(1 \pm h) + 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pm 4h + 2h^2}{\mp h + h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\pm 4 + 2h)}{h(\mp 1 + h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pm 4 + 2h}{\mp 1 + h} = -4$

5.  $f(x)$  Senkrechte Asymptote (Pol) Asymptote für  $x \rightarrow \pm \infty$

(a)  $\frac{(x+2)(x-2)}{x(x^2+8)}$   $x = 0$  Waagrecht:  $y = 0$

(b)  $\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+8)}$   $x = 0$  und  $x = -8$  Waagrecht:  $y = 1$

(c)  $x + \frac{12x}{(x+2)(x-2)}$   $x = -2$  und  $x = 2$  Schräg:  $y = x$

(d)  $3x - \sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$   $x = 1$  Schräg:  $y = 3x - \sqrt{2}$

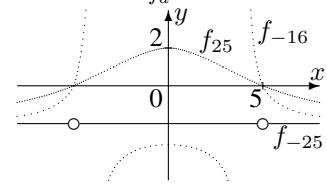
(e)  $\frac{7}{2}x - 3 - \frac{3}{2x}$   $x = 0$  Schräg:  $y = \frac{7}{2}x - 3$

Zu (c):  $f(x) = x + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x^3-4x+12x}{x^2-4} = \frac{x^3+8x}{x^2-4} = \frac{x(x^2+8)}{(x+2)(x-2)}$

6. (a) Definitionsbereich: Nenner  $x^2 + a = 0$ , also  $x^2 = -a$  liefert  $D_{f_a} = \mathbb{R}$ , falls  $a > 0$ , und  $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{\pm \sqrt{-a}\}$ , falls  $a \leq 0$ .

Nullstellen: Zähler  $-2x^2 + 50 = 0$  liefert  $x_{1/2} = \pm 5$ .

Einsetzen von  $x = 0$  ergibt  $Y_a(0 | \frac{50}{a})$  ( $a \neq 0$ ).



(b) Faktorisieren für  $a < 0$ :  $f_a(x) = \frac{-2(x+5)(x-5)}{(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}$ .

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{-a} \pm 0} f_a(x) = \frac{-2(\sqrt{-a} \pm 0 + 5)(\sqrt{-a} \pm 0 - 5)}{(\sqrt{-a} \pm 0 + \sqrt{-a})(\sqrt{-a} \pm 0 - \sqrt{-a})} = \frac{-2(\sqrt{-a} + 5)(\sqrt{-a} - 5)}{(2\sqrt{-a})(\pm 0)} \rightarrow \pm \infty$ ,

denn für  $-25 < a < 0$  ist  $\sqrt{-a} - 5$  negativ, der Zähler insgesamt also positiv.

(c) Man beachte, dass  $f_{-25}(x) = \frac{-2(x^2-25)}{x^2-25} = -2$  mit  $D_{f_{-25}} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$ .