

11. Klasse Lösungen	11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren	03

1.

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$$

Tangente:

$$y = f(1) = -36. \text{ Also } P(1 | -36).$$

$$m = f'(1) = 19$$

Ansatz für die Tangente: $y = 19x + t$.

$$P \text{ einsetzen: } -36 = 19 \cdot 1 + t; t = -55.$$

Also Tangente: $y = 19x - 55$.

Normale:

$$y = f(-1) = -54. \text{ Also } Q(-1 | -54).$$

Funktionssteigung $m_1 = f'(-1) = 3$.

Für die Normalensteigung m_2 gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$

Ansatz für die Normale: $y = -\frac{1}{3}x + t$

$$Q \text{ einsetzen: } -54 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + t; t = -54\frac{1}{3}. \text{ Also Normale: } y = -\frac{1}{3}x - 54\frac{1}{3}.$$

2.

Falls ein Berührungspunkt vorliegt, muss dort die Geradensteigung gleich der Funktionssteigung sein: $g'(x) = f'(x)$:

$$\frac{15}{4} = 3x^2 - 3; x_{1/2} = \pm\frac{3}{2}.$$

Zusätzlich muss ein gemeinsamer Punkt vorliegen, also $g(x) = f(x)$ sein.

Für $x_1 = +\frac{3}{2}$ ist (einsetzen, nachrechnen!) dies nicht der Fall, dagegen für $x_2 = -\frac{3}{2}$ ist $g(x_2) = f(x_2) = \frac{25}{8}$, so dass die Gerade im Punkt $(-\frac{3}{2} | \frac{25}{8})$ Tangente des Funktionsgraphen ist.

3.

$$\text{Schnittstelle: } f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Steigungen: $f'(x) = 2x + 2, g'(x) = 2x - 4$.

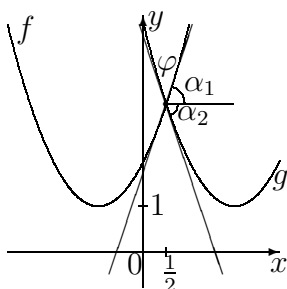
$$m_1 = f'(\frac{1}{2}) = 3, m_2 = g'(\frac{1}{2}) = -3.$$

$$\tan \alpha = m \Rightarrow \alpha_1 \approx 71,6^\circ, \alpha_2 \approx -71,6^\circ.$$

Größerer Winkel zwischen den Tangenten: $\alpha_1 + |\alpha_2| = \alpha_1 - \alpha_2 = 71,6^\circ + 71,6^\circ = 143,2^\circ$.

Kleinerer Winkel (Schnittwinkel):

$$\varphi = 180^\circ - 143,2^\circ = 36,8^\circ.$$



4.

(a) Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 6) = 0$:
 $x_{1/2} = 0$ (doppelt), keine weitere Lösung aus $x^2 - 4x + 6 = 0$.

Extrema/Monotonie:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0: 4x(x^2 - 3x + 3) = 0;$$

$x_1 = 0$ (wie erwartet); keine weitere Lösung aus $x^2 - 3x + 3 = 0$.

$$\begin{array}{c} f' < 0 & | & f' > 0 \\ \text{fällt} & & \text{steigt} \\ & 0 & \\ & \text{Min}(0; 0) & \end{array}$$

(b) Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 9) = 0$;
 $x_{1/2} = 0$ (doppelt), $x_{3/4} = \pm 3$.

Extrema/Monotonie:

$$f'(x) = 4x^3 - 18x = 4x(x^2 - 4,5) = 0;$$

$$x_1 = 0, x_{2/3} = \pm\sqrt{4,5}$$

$$\begin{array}{c} f' < 0 & | & f' > 0 & | & f' < 0 & | & f' > 0 \\ \text{fällt} & -\sqrt{4,5} & \text{steigt} & 0 & \text{fällt} & \sqrt{4,5} & \text{steigt} \\ & \text{Min} & & \text{Max} & & \text{Min} & \end{array}$$

$$\text{Min}(\pm\sqrt{4,5} | -20,25), \text{Max}(0 | 0)$$

Schnittwinkel bei der Nullstelle $x = 3$:
 $m = f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3 = 54 = \tan \alpha$, also $\alpha \approx 88,94^\circ$.

Achsensymmetrie von f , daher bei $x = -3$ Schnittwinkel $-88,94^\circ$.

5.

$$f'(x) = x - 1$$

$$f(x_0) = f(5) = 4,5, \text{ also } P_0(5 | 4,5).$$

Tangentensteigung $f'(x_0) = f'(5) = 4$.

Erster Näherungswert und neuer Startwert:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \frac{4,5}{4} = 3,875.$$

Zweiter Iterationsschritt:

$$f(x_1) = f(3,875) \approx 0,6328, \text{ Tangentensteigung } f'(x_1) = f'(3,875) = 2,875.$$

Zweiter Näherungswert:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 3,875 - \frac{0,6328}{2,875} \approx 3,6549.$$

6.

$$f'(x) = 2x - \sqrt{2} = 0. \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Dann ist } c = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$