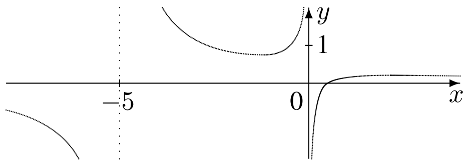
11. Klasse Lösungen | 11
Gebrochen-rationale Funktionen | 03

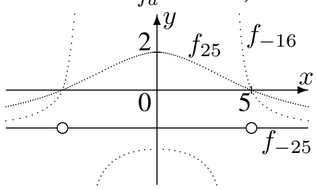
1. Faktorisieren: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+5x} = \frac{2(x-0{,}5)}{x(x+5)}$.
   $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x) = \text{"} \frac{-1}{(\pm 0)\cdot 5} \text{"} \to \mp\infty$.
   $\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x) = \text{"} \frac{-11}{(-5)\cdot(\pm 0)} \text{"} \to \pm\infty$.



2. $f(x) = \frac{1-x}{0{,}5(x-3)(x+1)}$ (vgl. grund113.pdf, Fußnote 2), also $D = \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$.
   $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = \text{"}\frac{2}{(0{,}5\cdot(-4)\cdot(\pm 0)}\text{"} \to \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} f(x) = \text{"}\frac{-2}{(0{,}5\cdot(\pm 0)\cdot 4}\text{"} \to \mp\infty$, senkrechte Asymptoten (einfache Polstellen) $x = -1$ und $x = 3$.
   Da der Graph rechts von $x = -1$ nach unten verläuft und links von $x = 3$ nach oben, ist der Wertebereich $W = \mathbb{R}$. Dazwischen Nullstelle $x = 1$.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, also waagrechte Asymptote $y = 0$. Schnitt mit der y-Achse: $(0|-\frac{2}{3})$.
3. Bei einer Polstelle ungerader Vielfachheit erhält man einen Vorzeichenwechsel (Vzw); bei gerader Vielfachheit liegt bei Annäherung von links und von rechts das gleiche Vorzeichen vor. Definitionslücke ist in allen gegebenen Beispielen $x = -3$.
   (a) $f(x) = \frac{-x^2}{3(x+3)^2}$. Polstelle 2. Ordnung, kein Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) = \text{"}\frac{-9}{+0}\text{"} \to -\infty$
   (b) $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^3}$. Polstelle 3. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) = \text{"}\frac{+9}{\pm 0}\text{"} \to \pm\infty$
   (c) $f(x) = \frac{(2+x)(2-x)}{(x+3)(x^2-3x+9)}$. Polstelle 1. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) = \text{"}\frac{-5}{\pm 0}\text{"} \to \mp\infty$
   Damit ergibt sich: Abbildung A ist f_1, B ist f_2, C ist f_3.
4. Polstelle, z. B. $(x-2)^2$ im Nenner. „Keine Nullstellen“: Im Zähler zunächst Term wie x^2+1 bzw. besser x^2+a. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ Vorfaktor 3 im Zähler. Somit $f(x) = \frac{3(x^2+a)}{(x-2)^2}$. y-Achsen-Schnitt: $f(0) = \frac{3\cdot a}{4} = 6$, also $a = 8$. Somit $f(x) = \frac{3(x^2+8)}{(x-2)^2}$.
5.

	$f(x)$	Senkrechte Asymptote (Pol)	Asymptote für $x\to\pm\infty$
(a)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x^2+8)}$	$x = 0$	Waagrecht: $y = 0$
(b)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+8)}$	$x = 0$ und $x = -8$	Waagrecht: $y = 1$
(c)	$x + \frac{12x}{(x+2)(x-2)}$	$x = -2$ und $x = 2$	Schräg: $y = x$
(d)	$3x - \sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$	$x = 1$	Schräg: $y = 3x - \sqrt{2}$
(e)	$\frac{7}{2}x - 3 - \frac{3}{2x}$	$x = 0$	Schräg: $y = \frac{7}{2}x - 3$

   Zu (c): $f(x) = x + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x^3-4x+12x}{x^2-4} = \frac{x^3+8x}{x^2-4} = \frac{x(x^2+8)}{(x+2)(x-2)}$
6. (a) Definitionsbereich: Nenner $x^2 + a = 0$, also $x^2 = -a$ liefert $D_{f_a} = \mathbb{R}$, falls $a > 0$, und $D_{f_a} = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{-a}\}$, falls $a \le 0$.
   Nullstellen: Zähler $-2x^2 + 50 = 0$ liefert $x_{1/2} = \pm 5$.
   Einsetzen von $x = 0$ ergibt $Y_a(0|\frac{50}{a})$ $(a \ne 0)$.



   (b) Faktorisieren für $a < 0$: $f_a(x) = \frac{-2(x+5)(x-5)}{(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}$.
   $\lim\limits_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f_a(x) = \text{"}\frac{-2(\sqrt{-a}\pm 0+5)(\sqrt{-a}\pm 0-5)}{(\sqrt{-a}\pm 0+\sqrt{-a})(\sqrt{-a}\pm 0-\sqrt{-a})}\text{"} = \text{"}\frac{-2(\sqrt{-a}+5)(\sqrt{-a}-5)}{(2\sqrt{-a})(\pm 0)}\text{"} \to \pm\infty$,
   denn für $-25 < a < 0$ ist $\sqrt{-a} - 5$ negativ, der Zähler insgesamt also positiv.
   (c) Man beachte, dass $f_{-25}(x) = \frac{-2(x^2-25)}{x^2-25} = -2$ mit $D_{f_{-25}} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 5\}$.