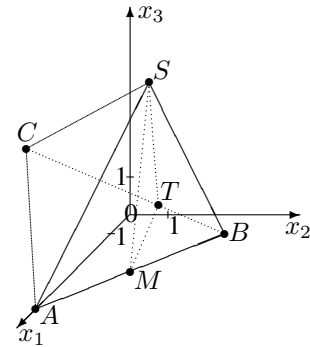




11. Klasse Lösungen	11
Koordinatengeometrie: Vektoren	04

1. (a) $\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$, also $M(4|2|0,5)$. (b)

$\vec{CT} = \frac{2}{3}\vec{CB}$, d. h. $\vec{T} - \vec{C} = \frac{2}{3}(\vec{B} - \vec{C})$, also
 $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 - 1,5 \\ 4 - (-2) \\ 1 - 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$, $T(2,5|2|1,5)$.



(c) $V_{ABCS} = \frac{1}{6}|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}| =$
 $= \frac{1}{6} \left| \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| =$
 $= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 1,5 \\ 18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-24 + 3 + 90| = \frac{23}{2}$.

Analog $V_{MBTS} = \frac{1}{6}|(\vec{MB} \times \vec{MT}) \circ \vec{MS}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right| = \frac{23}{12}$.

(d) $\vec{TS} = \vec{TB} + \vec{BS} = \frac{1}{3}\vec{CB} + \vec{BS} = \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BS} = \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BS} =$
 $= \frac{1}{3}(-\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} + \vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w}$.

2. (a) $|\vec{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}$.

Analog $|\vec{BD}| = |\vec{D} - \vec{B}| = \sqrt{0,25 + 2,25 + 0} = \sqrt{2,5} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$,

$|\vec{AD}| = |\vec{D} - \vec{A}| = \sqrt{12,25 + 0,25 + 0} = \sqrt{12,5} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

$\alpha = \sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AD})$: $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{3 \cdot 3,5 + (-1) \cdot 0,5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,5}} \approx 0,894$, also $\alpha \approx 26,6^\circ$.

$\beta = \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BD})$: $\cos \beta = \frac{\vec{BA} \circ \vec{BD}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BD}|} = \frac{-3 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2,5}} = 0$, also $\beta = 90^\circ$.

Gemäß der Winkelsumme im Dreieck ist $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 63,4^\circ$.

(b) $\vec{DC} = \vec{AB}$, also $\vec{C} = \vec{D} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $C(5,5|-1,5|1)$.

(c) $\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Länge 5 dieses Vektorprodukts ist die Fläche des Parallelogramms $ABCD$.

Die x_3 -Richtung dieses Vektors musste sich ergeben, da $\vec{AB} \times \vec{AD}$ senkrecht auf \vec{AB} und \vec{AD} steht, also senkrecht auf der Parallelogramm-Fläche, und dieses liegt wegen der gemeinsamen x_3 -Koordinate in der zur x_1x_2 -Grundebene parallelen Ebene $x_3 = 1$.

(d) $A'B'D'$ ist ebenso wie ABD ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken auf dem Thaleskreis über $[A'D']$ liegen, also mit Mittelpunkt $M'(0,75|-0,75)$ (aus $\vec{M}' = \frac{1}{2}(\vec{A}' + \vec{D}')$) und Radius $r = \frac{1}{2}|\vec{A}'\vec{D}'| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$ (also $r^2 = \frac{25}{16} \cdot 2 = \frac{25}{8}$).

3. $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - (-5))^2 + (x_3 - 0)^2 = 6^2$, also $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2 + x_3^2 = 36$ (bzw. ausquadriert $x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 10x_2 + x_3^2 = 2$).

Wegen $|\vec{MO}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 0} = \sqrt{34} < 6$ liegt O innerhalb der Kugel.

4. $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{\sqrt{16+9+0} \cdot \sqrt{4+4+1}} \approx -0,133$, also $\varphi \approx 97,7^\circ$.