



<b>11. Klasse Lösungen</b>	<b>11</b>
<b>Differentiationsregeln</b>	<b>06</b>

1. (a)  $f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$       (b)  $f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot 2x - x^2 \cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$
- (c)  $f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$       (d)  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
- (e)  $f(x) = \sin(\frac{1}{2\pi}x)$ , also  $f'(x) = \cos(\frac{1}{2\pi}x) \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cos(\frac{x}{2\pi})$
- (f)  $f(x) = 4 \cdot (3x - 2)^{-1}$ , also  $f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot (3x - 2)^{-2} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^2}$
- (g)  $f'(x) = (7x - 1)^4 \cdot (-2)x^{-3} + 4(7x - 1)^3 \cdot 7 \cdot x^{-2} = \frac{(7x-1)^3(14x+2)}{x^3}$
- (h)  $f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$
- (i)  $f'(x) = \frac{(2x-1)^2 \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} = \frac{2(2x-1) - 4(2x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{-4x-6}{(2x-1)^3}$

2.  $f(x) = (1 - 4x^2)^{1/2}$ ;  $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - 4x^2)^{-1/2} \cdot (-8x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

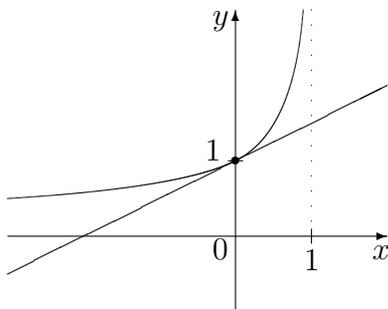
Für die Wurzel muss  $1 - 4x^2 \geq 0$  gelten, also  $x^2 \leq \frac{1}{4}$ , also  $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

Da bei  $f'$  dieser Ausdruck im Nenner steht, ist dort sogar  $1 - 4x^2 > 0$  zu verlangen.

Somit:  $D_f = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ ;  $D_{f'} = ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

3.  $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ ;  $f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2}$ .

$f'(0) = \frac{1}{2}$ , die Tangente hat also die Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .



Näherung:

Für „kleine“  $x$  (nahe 0) gilt  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{2}x + 1$

Anwendung auf  $E = mc^2 = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ :

Für kleine  $v/c$ , d. h. für Geschwindigkeiten  $v$ , die klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c$ , gilt:  $E \approx m_0c^2(\frac{1}{2}(v/c)^2 + 1) = \frac{1}{2}m_0v^2 + m_0c^2$   
(Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Ruheenergie  $m_0c^2$  und der kinetischen Energie)

4. Die Steigung von  $f$  ist gegeben durch  $f'(x) = 0,2 - \sin(2x) \cdot 2$ ;  $f'$  ist am größten, wenn  $\sin$  am kleinsten ist, also wenn  $\sin(2x) = -1$ , d. h.  $2x = \frac{3\pi}{2}$ , d. h.  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

5. Verschiedene Schreibweisen für den Funktionsterm:  $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \frac{1-x^3}{x} = x^{-1} - x^2$ .

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = \frac{\pm 1}{\pm 0} \rightarrow \pm \infty$  (Senkrechte Asymptote, Pol 1. Ordnung  $x = 0$ )

Nullstelle:  $f(x) = 0: 1 - x^3 = 0; x = 1$

Extremum und Monotonie:  $f'(x) = -x^{-2} - 2x = \frac{-1-2x^3}{x^2}$

$f'(x) = 0: -1 - 2x^3 = 0; x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f' > 0$        $f' < 0$        $f' < 0$

steigt      fällt      fällt

Max       $\notin D$

$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} | -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  ist  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , also schmiegt sich der Graph von  $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$  an die Parabel  $y = -x^2$  an (also auch  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \rightarrow -\infty$ ).