CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg118.pdf

11. Klasse Lösungen — 11
Monotonie, Extrema — 08

1.

(a) Nullstellen: $f(x)=x^2(x^2-4x+6)=0$: $x_{1/2} = 0$ (doppelt), keine weitere Lösung aus $x^2-4x+6=0$.

Extrema/Monotonie:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$
$f'(x) = 0$: $4x(x^2-3x+3) = 0$;
$x_1 = 0$ (wie erwartet); keine weitere Lösung aus $x^2-3x+3=0$.

$f'<0$ | $f'>0$
fällt 0 steigt
Min$(0;0)$

(b) Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2-9) = 0$; $x_{1/2} = 0$ (doppelt), $x_{3/4} = \pm 3$.

Extrema/Monotonie:
$f'(x) = 4x^3-18x = 4x(x^2-4{,}5) = 0$;
$x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{4{,}5}$

$f'<0$ | $f'>0$ | $f'<0$ | $f'>0$
fällt $-\sqrt{4{,}5}$ steigt 0 fällt $\sqrt{4{,}5}$ steigt
Min Max Min

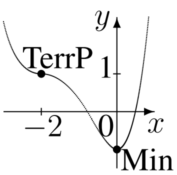
Min$(\pm\sqrt{4{,}5}|-20{,}25)$, Max$(0|0)$

Schnittwinkel bei der Nullstelle $x=3$: $m = f'(3) = 4\cdot 3^3 - 18\cdot 3 = 54 = \tan\alpha$, also $\alpha \approx 88{,}94°$.
Achsensymmetrie von f, daher bei $x=-3$ Schnittwinkel $-88{,}94°$.

2.
$f'(x) = \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 + 6x$
$f'(x) = 0$: $x(\frac{3}{2}x^2 + 6x + 6) = 0$.
$x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 1{,}5\cdot 6}}{2\cdot 1{,}5} = -2$

$f'<0$ | $f'<0$ | $f'>0$
fällt -2 fällt 0 steigt
TerrP Min

TerrP$(-2|1)$, Min$(0|-1)$



Zwar könne eine Funktion 4. Grades bis zu vier Nullstellen haben, hier aber liegen zwei vor, da wegen der Lage der Punkte und der Monotonie im Intervall $]-\infty;-2]$ keine Nullstelle liegen kann, im Intervall $[-2;0]$ genau eine, in $[0;\infty[$ ebenso genau eine.

3.
$f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x + 2$
$f'(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3$
$f'(x) = 0$: $0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{1{,}6\pm\sqrt{2{,}56-4\cdot 0{,}2\cdot 3}}{2\cdot 0{,}2}$
$x_1 = 5$, $x_2 = 3$

$f'>0$ | $f'<0$ | $f'>0$
0 steigt 3 fällt 5 steigt
Max$(3|5{,}6)$ Min$(5|5\frac{1}{3})$

Diese Funktion 3. Grades verläuft nach rechts oben, am linken Rand des Definitionsbereichs ist der Graphenpunkt $(0|2)$ noch tiefer als das lokale Min.
Somit:
Lokale Extrema: Max$(3|5{,}6)$, Min$(5|5\frac{1}{3})$
Globales Minimum: Randminimum bei $(0|2)$, also kleinstmöglicher Wert $y=2$.
Ein globales Maximum gibt es nicht, da nach rechts wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$ beliebig große Werte vorliegen.

4.
f' muss an den Stellen $x=2$ und $x=5$ Nullstellen mit Vorzeichenwechel haben, also z. B. $f'(x) = (x-2)(x-5) = x^2-7x+10$.
Somit ist z. B. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x$.
Denkbar ist noch ein Vorfaktor (z. B. 6) oder eine additive Konstante (z. B. -11), also z. B. auch $f_2(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 11$.

5.
Im Intervall $[-4{,}6;0]$ ist der Graph monoton fallend (aber nicht streng monoton), im Intervall $[0;7{,}2]$ monoton steigend.
Globaler Minimalwert ist der im Punkt $(0|0)$ vorliegende Wert 0, globaler Maximalwert der im Punkt $(7{,}2|3{,}9)$ vorliegende Wert 3,90 (Randextremum)

6.
$f'(x) = 2x - \sqrt{2} = 0. \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dann ist $c = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1} =$
$= \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.