



<b>11. Klasse Lösungen</b>	<b>11</b>
<b>Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit</b>	<b>09</b>

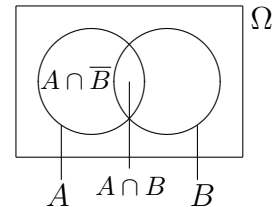
1. Betrachtet man das nebenstehende Diagramm, so sieht man  $A \cup B = \underbrace{(A \cap \bar{B})}_{E_1} \cup \underbrace{B}_{E_2}$ , wobei dann  $E_1 \cap E_2 = \{\}$ , wende

also Axiom (3) an:  $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$ .

Ebenso ist  $A = \underbrace{(A \cap \bar{B})}_{E_1} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{E_2}$  disjunkt und somit

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$ , also  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ .

Hieraus folgt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .



2. (a)  $V$ : Vorderlicht defekt.  $R$ : Rücklicht defekt.

Vierfeldertafel: Man macht sich zuerst klar, dass die W. von mindestens einem Defekt  $P(R \cup V)$  durch drei der Felder gegeben ist, so dass für das vierte Feld  $P(\bar{R} \cap \bar{V}) = 1 - 0,09$  bleibt. Zeilen- und spaltenweise können die restlichen Felder ergänzt werden.

	$V$	$\bar{V}$	
$R$	0,003	0,057	0,06
$\bar{R}$	0,03	0,91	0,94
	0,033	0,967	1

Man erkennt die Abhängigkeit:  $P(V) \cdot P(R) = 0,033 \cdot 0,06 \neq 0,003 = P(V \cap R)$ .

(b) Im Fall von Unabhängigkeit müsste für die gegebene Größe gelten:

$P(R \cap \bar{V}) = P(R) \cdot P(\bar{V})$ , also  $0,057 = 0,06 \cdot P(\bar{V})$ , also  $P(\bar{V}) = \frac{0,057}{0,06} = 0,95$ ,  
also  $P(\bar{R} \cap \bar{V}) = 0,94 \cdot 0,95 = 0,893$ , also  $P(R \cup V) = 1 - 0,893 = 0,107$ .

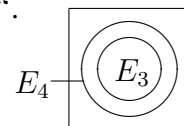
3.  $\bar{E}_3$ : „Frühestens der 4. Besucher wünscht Currywurst“ oder „Die ersten 3 Besucher wünschen nicht Currywurst.“

$\bar{E}_3 \cap E_4$ : „Der vierte Besucher ist der erste, der Currywurst wünscht“.

$P(\bar{E}_3) = 1 - P(E_3) = 1 - (1 - 0,6^3) = 0,216$ .

Es ist  $E_3$  Teilmenge von  $E_4$  und daher

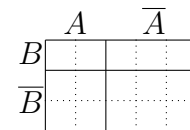
$P(\bar{E}_3 \cap E_4) = P(E_4) - P(E_3) = 1 - 0,6^4 - (1 - 0,6^3) = 0,0864$



4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = 0,6$ .

$A, B$  unabhängig:  $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} = P(A \cap B)$ .

Im Bild ist dies daran erkennbar, dass die „Teilungslinie“ auf gleicher Höhe verläuft, was bedeutet, dass der Anteil der  $B$  unter den  $A$  (also  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ) gleich dem Anteil der  $B$  unter der Gesamtmenge ist ( $= P(B)$ ).



5. (a)  $\Omega = \{1111, \dots, 7777\}$ , also (Zählprinzip  $\rightarrow$  grund55.pdf):  $|\Omega| = 7^4 = 2401$ .

Für die Anordnungsmöglichkeiten der gleichen Ziffern gibt es 6 Möglichkeiten (11xy, 1x1y, 1xy1, x11y, x1y1, xy11).

Es gibt 7 Möglichkeiten für die Wahl der beiden gleichen Ziffern, dann noch 6 Möglichkeiten für die zweite und dann noch 5 Möglichkeiten für die dritte Ziffer.

Also  $|Z| = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$ , somit  $P(Z) = \frac{1260}{2401} \approx 0,525$ .

(b) Es gibt 4 ungerade Ziffern 1, 3, 5, 7, also  $P(U) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$ .

Entsprechend zu Teilaufgabe (a) überlegt man:  $|U \cap Z| = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ .

$P(U \cap Z) = \frac{144}{2401} \approx 0,060$ , aber  $P(U) \cdot P(Z) = \frac{256}{2401} \cdot \frac{1260}{2401} \approx 0,056$ . Also sind  $U$  und  $Z$  abhängige Ereignisse.

(c)  $P_Z(U) = \frac{P(U \cap Z)}{P(Z)} = \frac{144}{1260} \approx 0,114$ .