12. Klasse Lösungen — 12

Lagebeziehung Ebene – Ebene — 10

1.

(a) E_1 und E_2 schneiden sich (Normalvektoren sind nicht Vielfache).

$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \quad | \cdot 4$

$4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \quad |$

$12x_1 - 5x_2 = 33$

$x_1 = \lambda$

$12\lambda - 5x_2 = 33$, also $x_2 = 2{,}4\lambda - 6{,}6$

$2\lambda - (2{,}4\lambda - 6{,}6) - 2x_3 = 6$; $x_3 = 0{,}3 - 0{,}2\lambda$

Schnittgerade:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Schnittwinkel: $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 8|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{16+1+64}} = \frac{7}{27}$; $\varphi \approx 74{,}97°$.

(b) E_1 und E_2 sind echt parallel (denn $E_2 | \cdot (-2)$ ergibt $2x_1 - x_2 - 2x_3 = -12$).

HNF von E_1: $|\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+4} = 3$, also $E_1 : \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6) = 0$.
Punkt auf E_2: $P(0|0|6)$. Abstand: $d(E_1, E_2) = |\frac{1}{3}(0 - 0 - 2\cdot 6 - 6)| = 6$.

(c) E_1 und E_2 sind identisch (denn Mult. der E_2-Gleichung mit 4 ergibt E_1).

2.

F muss in Ri. der Geraden und in Ri. des Normalvektors der Ebene E verlaufen, also Normalvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und F enthält den Geraden-Aufpunkt $A(1|1|-1)$.
Ansatz: $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = d$, A einsetzen: $7 - 1 - 3 = d$, also $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.

3.

(a) $E_{BCT}: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ansatz $18\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{6}x_2 - 6\sqrt{3}x_3 = d$, $B(-6|0|0)$ einsetzen: $d = -108\sqrt{2}$.
Division durch $6\sqrt{3}$ ergibt $E_{BCT} : \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$, also mit E_{ASC} paralleler Normalvektor.

(b) Ansatz für die Parallelebene: $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = d$, Einsetzen von Q liefert $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$.

Einsetzen von $B \rightarrow$ wahre Aussage.

(c) HNF von E_{ASD}: $|\vec{n}| = \sqrt{6+2+1} = 3$, also $E_{ASD} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = 0$.
HNF von $E_{ABS} : x_3 = 0$.

Für Punkte P mit gleichem Abstand von E_{ABS} und E_{ASD} gilt $d(P, E_{ABS}) = d(P, E_{ASD})$, also (mit HNF): $|\frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3)| = |x_3|$.

Winkelhalbierende Ebenen also:
$E_{W1} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = +x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - 4x_3 = 0$ und $E_{W2} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = -x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 = 0$ (wobei $M \in E_{W2}$).

(d) D' wird als allgemeiner Geradenpunkt von p angesetzt: $D'(2-\lambda|\sqrt{3}\lambda|0)$.
$\overrightarrow{AD'} \perp \overrightarrow{SD'}$, also $\overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{SD'} = 0$, also $(2-\lambda)\cdot(2-\lambda+3) + \sqrt{3}\lambda\cdot(\sqrt{3}\lambda - 3\sqrt{3}) + 0 = 0$, also $4\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 0$.

(e) x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$. $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$.
Bei diesem unterbestimmten Gleichungssystem liegen x_2 und x_3 bereits fest. Frei wählbar ist also nur $x_1 = \lambda$.
Somit:

$$YZ : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(f) $V_{\text{Oktaeder}} = 2\cdot$Volumen der Pyramide $ABCDT = 2 \cdot \frac{1}{3}$Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei Grundfläche = Quadratfläche und Höhe = Abstand des Punktes T von der Ebene E_{ABD} (mit Hilfe der HNF).
Volumen der Pyramide $ABYZT = \frac{1}{3}$ Trapez-Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei die Höhe wieder als Abstand des Punktes T von der Trapez-Ebene $x_2 = 0$ gesehen werden kann.

Der prozentuale Anteil wird dann als Bruch $\frac{V_{\text{Pyr}}}{V_{\text{Oktaeder}}}$ berechnet.