12. Klasse Lösungen — 12

Integration — 01

1.

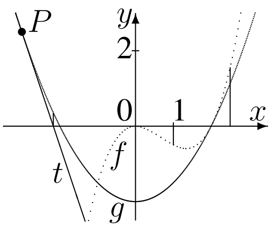
(a) Da f streng monoton steigend ist, nimmt die Funktion jeweils am rechten Streifenrand ihren größten Wert an. Daher ist $A \leq$ „Summe Streifenbreite · Streifenhöhe“ $1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = \frac{e^{-1}}{e^{-1}+1} + \frac{e^0}{e^0+1} + \frac{e^1}{e^1+1} + \frac{e^2}{e^2+1} \approx 2{,}38$.

(b) $A = \int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = [\ln(e^x+1)]_{-2}^{2} = \ln(e^2+1) - \ln(e^{-2}+1) = 2$.
Die Abweichung 0,38 sind $\frac{0{,}38}{2} = 0{,}19 = 19\ \%$ hiervon.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$ beschreibt einen Sättigungswert, dem sich die Verkaufszahlen auf lange Dauer nähern.
Das Integral A beschreibt einen Gesamtbestand, d. h. die Gesamtzahl der verkauften Autos im Zeitraum von vier Jahren (seit Markteinführung vor zwei Jahren bis in zwei Jahren) gemäß dieser Modellierung.

2.

(a) Wegen der Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und wegen der Lage unterhalb der x-Achse ist



$A_1 = -\int\limits_0^2 f(x)dx = -\int\limits_0^2 (\frac{1}{2}x^3 - x^2)dx = -\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = -(2 - \frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$.

(b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$;
$(x-2)x^2 = (x+2)(x-2)$; also $x_1 = 2$ oder $x^2 = x+2$, d. h. $x^2 - x - 2 = 0$, d. h. $x_{2/3} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$
$A_2 = \int\limits_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4 - 8 + 8 - (\frac{1}{4} - (-1) - 4)) = \frac{27}{8}$.

(c) $A_3 = \int\limits_1^{2{,}5} (\frac{1}{2}x^3 - x^2)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{2{,}5} = \frac{1}{8}\cdot 2{,}5^4 - \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^3 - (\frac{1}{8} - \frac{1}{3}) \approx -0{,}12 < 0$
Von den Flächenstücken, die zu diesem Integral beitragen, liegt mehr unterhalb als oberhalb der x-Achse.

(d) Berechnung der Tangente: $g'(x) = x$, $m = g'(-3) = -3$, Ansatz $y = -3x + t$, P einsetzen $2{,}5 = -3\cdot(-3) + t$ liefert t, also Tangente $t(x) = -3x - 6{,}5$.
Nullstelle der Tangente:
$-3x - 6{,}5 = 0$, also $x = -\frac{13}{6}$.

Das Flächenstück wird durch die Gerade $x = -\frac{13}{6}$ zerlegt in zwei Teile:
$A_4 = \int\limits_{-3}^{-\frac{13}{6}} (g(x) - t(x))dx + \int\limits_{-\frac{13}{6}}^{-2} g(x)dx$
$= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_{-3}^{-\frac{13}{6}} + \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-\frac{13}{6}}^{-2}$
$= \frac{1}{6}\cdot(-\frac{13}{6})^3 + \frac{3}{2}\cdot(-\frac{13}{6})^2 + \frac{9}{2}\cdot(-\frac{13}{6}) - (\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-3)^2 + \frac{9}{2}\cdot(-3)) + \frac{1}{6}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2) - (\frac{1}{6}\cdot(-\frac{13}{6})^3 - 2\cdot(-\frac{13}{6})) = \frac{1}{8}$

(e) $\int\limits_0^b (\frac{1}{2}x^2 - 2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_0^b = \frac{1}{6}b^3 - 2b - 0 = 0$, also $b(\frac{1}{6}b^2 - 2) = 0$, also $b_1 = 0$, $b_{2/3} = \pm\sqrt{12}$.

Bei $b = 0$ schrumpft die Fläche auf eine Linie der Breite 0, also Fläche 0.

Bei $b = \pm\sqrt{12}$ haben die Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gleichen Inhalt.

3.

(a) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^3 - x - 5}{x^2}dx = \int\limits_{-2}^{-1} (x - \frac{1}{x} - 5x^{-2})dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + 5x^{-1}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \ln 1 - 5 - (2 - \ln 2 - \frac{5}{2}) \approx -3{,}31$

(b) $\int\limits_0^4 (6x^{\frac{1}{3}} - 5)dx = \left[6\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 5x\right]_0^4 = \frac{9}{2}\cdot 4^{\frac{4}{3}} - 20 - 0 \approx 8{,}57$

(c) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1) \approx 0{,}86$