12. Klasse Lösungen (alter LP) | 12
Geradengleichungen | 05

1.
Q liegt nicht auf g, denn:
$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad\begin{matrix}\Rightarrow\lambda=-1\\ \checkmark\\ \lightning\end{matrix}$$
$R(0|2|1)$ liegt auf g, denn:
$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad\begin{matrix}\Rightarrow\lambda=-2\\ \text{Probe: passt!}\\ \text{Probe: passt!}\end{matrix}$$
S liegt nicht auf g, denn:
$$\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad\begin{matrix}\Rightarrow\lambda=3\\ \lightning\end{matrix}$$
Für die x_3-Koordinate von T gilt: $0=-1-\lambda$, also $\lambda=-1$, also $T(1|4|0)$.

2.
$$AB:\vec{X}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\6\\-4\end{pmatrix},\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$
C liegt auf g: Wähle $\lambda=\frac{2}{3}$.
D liegt auf g: Wähle $\lambda=-2{,}5$.

3.
$$AB:\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$
Ansatz: $F(-1+3\lambda|-1-\lambda|1)$.
$$DF\perp g\text{, also }\begin{pmatrix}-1+3\lambda-2{,}5\\-1-\lambda+0{,}5\\1-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=0.$$
$(-3{,}5+3\lambda)\cdot 3+(-0{,}5-\lambda)\cdot(-1)+0=0$.
$-10+10\lambda=0$. $\lambda=1$. Also $F(2|-2|1)$.
Abstand $d(D,AB)=|\overrightarrow{DF}|=$
$=\sqrt{(2-2{,}5)^2+(-2+0,5)^2+(1-1)^2}=$
$=\sqrt{2{,}5}$.
Dreiecksfläche A_{ABD}: $[DF]$ ist die Höhe im Dreieck ABD auf der Grundlinie $[AB]$, also
$A_{ABD}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DF}=$
$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2{,}5}=\frac{5}{2}$.
Gleiches Ergebnis bei Berechnung mit dem Vektorprodukt: $A_{ABD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\frac{5}{2}$.

4.
(a) Aufpunkt $(0|0|0)$, also ist g eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

(b) x_2-Komponente konstant 5, also ist h parallel zur x_1x_3-Ebene.

5.
(a) Die Punktkoordinaten können direkt in eine Geradengleichung übertragen werden („allgemeiner Geradenpunkt rückwärts“):
$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\14\\12\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\quad a\in\mathbb{R}.$$

(b) Die drei Punkte haben jeweils gleichen Abstand voneinander.

Mögliche Formulierungen:

$P_{0,5}$ ist Mittelpunkt von P_0 und P_1.

P_{-1} ist der Spiegelpunkt von P_1 bei Spiegelung am Punkt P_0.

6.
(a) Die x_3-Koordinate wird 0:
$$p:\vec{X}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\tau\in\mathbb{R}.$$

(b) y-Achsenabschnitt $(0|2{,}5)$ als Aufpunkt. Wegen Steigung $-\frac{1}{2}$ Richtungsvektor „2 nach rechts, 1 nach unten“, also
$$\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

Dies ist übrigens die in die x_1x_2- bzw. xy-Grundebene eingebettete Gerade aus Teilaufgabe (a), denn der Punkt $(0|2{,}5|0)$ liegt auf p, wie man mit $\tau=-1{,}5$ sieht.