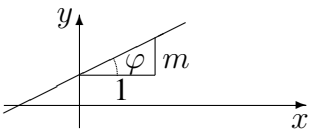
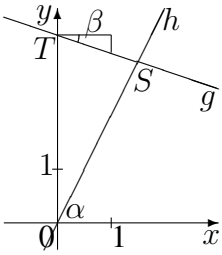
9. Klasse Lösungen	9
sin, cos, tan im rechtwinkligen Dreieck	**08**

1. (a) $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 57° = 33°$ (Winkelsumme im Dreieck)
   $\sin\beta = \frac{b}{c}$, also $b = c\sin\beta = 4\sin 57° \approx 3{,}35$
   $\cos\beta = \frac{a}{c}$, also $a = c\cos\beta = 4\cos 57° \approx 2{,}18$ (oder Pythagoras: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$)
   (b) $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 24° = 66°$
   $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 66{,}38$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, also $b = \frac{a}{\tan\alpha} \approx 60,64$
   (c) $a^2 + b^2 = c^2$, also $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0{,}35^2 - 0{,}1^2} \approx 0{,}34$
   $\sin\alpha = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\alpha \approx 16{,}60°$; $\cos\beta = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\beta \approx 73{,}40°$

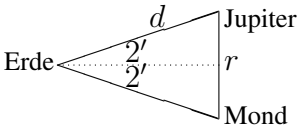
2. (a) 

   Die Gerade $y = mx + t$ mit Steigung m hat als Steigungsdreieck „1 nach rechts, m nach oben“. Man liest dort ab: $\tan\varphi = \frac{m}{1} = m$.

   (b) 

   Für Gerade h folgt wegen der Steigung $m = 2$ aus $\tan\alpha = 2$ ein Neigungswinkel $\alpha \approx 63{,}43°$.
   Somit ist $\sphericalangle SOT = 90° - \alpha \approx 26{,}57°$.
   Für Gerade g folgt wegen des Steigungsdreiecks (3 nach rechts, 1 nach unten) aus $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ein Winkel $\beta \approx 18{,}43°$.
   Somit ist $\sphericalangle OTS = 90° - \beta \approx 71{,}57°$.
   Winkelsumme im Dreieck: $\sphericalangle TSO \approx 81{,}86°$

3. ΔABC: $\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, also $\overline{BC} = \overline{AB}\tan\alpha \approx 10{,}38$
   ΔABD: $\tan\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, also $\overline{AD} = \overline{AD}\tan\beta \approx 8{,}34$
   Pythagoras im ΔDFC: $x = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{FC}^2} \approx \sqrt{7^2 + (\overline{BC} - \overline{AD})^2} \approx 7{,}29$

4. 

   Halbiert man nebenstehendes gleichschenkliges Dreieck, so erkennt man: $\sin 2' = \frac{r/2}{d}$, somit ergibt sich als Entfernung r von noch getrennt wahrnehmbaren Lichtpunkten:
   $r = 2d\sin 2' = 2 \cdot 800 \cdot 10^6 \cdot \sin(\frac{2}{60})°$ km $\approx 930\,000$ km.
   Somit könnten theoretisch Ganymed und Kallisto noch getrennt gesehen werden.

5. Es ist $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
   (a) $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$
   $1 + \tan^2 30° = 1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45° = 2$
   (b) $1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
   $1 + \tan^2 30° = \frac{1}{\cos^2 30°} = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45° = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 2$

6. ΔEMG: Rechter Winkel bei E; $\overline{EG} = \sqrt{2}a$ (Diagonale im Quadrat → grund93.pdf).
   Pythagoras also: $\overline{MG} = \sqrt{\overline{ME}^2 + \overline{EG}^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2a^2} = 1{,}5a$.
   Ebenso ΔNBG: $\overline{NG} = 1{,}5a$. Also ist ΔMNG gleichschenklig.
   Ferner: $\overline{MN} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a$ (denn $[MN]$ ist Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge $\frac{a}{2}$).
   Sei L der Mittelpunkt von $[MN]$. Dann ist $\overline{ML} = \frac{1}{2}\overline{MN} = \frac{1}{4}\sqrt{2}a$.
   ΔMLG: $\cos\mu = \frac{\overline{ML}}{\overline{MG}} = \frac{0{,}25\sqrt{2}a}{1{,}5a} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$. Somit $\mu \approx 76{,}37°$.