



Lösungen weitere Themen (alter LP)	W
Wendepunkte	11

1.

(a) $f'(x) = 8x^3 - 1; f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0: x^3 = \frac{1}{8}; x = \frac{1}{2}$.
 $f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow \text{Min}$

Wendepunkte: $f''(x) = 0: x = 0$.

Verwendung der 3. Ableitung hier nicht möglich, also Vorzeichenuntersuchung:

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ f'' > 0 \quad 0 \quad f'' > 0 \end{array}$$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
 $f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0:$

$-2x^2(2x - 3) = 0; x_{1/2} = 0; x_3 = \frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ | \quad | \quad | \\ f' > 0 \quad f' > 0 \quad f' < 0 \\ \text{steigt} \quad 0 \quad \text{steigt} \quad \frac{3}{2} \quad \text{fällt} \end{array}$$

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0:$

$-12x(x - 1) = 0; x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ | \quad | \\ f'' < 0 \quad 0 \quad f'' > 0 \quad 1 \quad f'' < 0 \end{array}$$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y -Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x)$: $f(0) = 0, f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt (1|1):

$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.

Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0: x = 0$.

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ f' < 0 \quad f' > 0 \\ \text{fällt} \quad 0 \quad \text{steigt} \end{array}$$

Also Minimum bei $x = 0$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0: x = 0$.

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ f'' > 0 \quad 0 \quad f'' > 0 \end{array}$$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

2.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12$

Nullstellen: $f(x) = 0: x^2(x^2 - 4x + 6) = 0;$
 $x_{1/2} = 0$ (doppelt),

keine weitere Lösung aus $x^2 - 4x + 6 = 0$.

Extrema: $f'(x) = 0: 4x(x^2 - 3x + 3) = 0;$
 $x_1 = 0$ (wie erwartet);

keine weitere Lösung aus $x^2 - 3x + 3 = 0$.Wegen $f''(0) = 12 > 0$ Minimum bei $x = 0$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0:$

$12(x^2 - 2x + 1) = 0; (x - 1)^2 = 0; x_{1/2} = 1$.

Da stets $f''(x) \geq 0$, liegt kein Krümmungswechsel vor, also Flachpunkt bei $x = 1$.

3.

(a) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$

$f''(x) = 12x^2 + 6x + 4$.

 $f''(x) = 0$: Keine Lösung der quadratischen Gleichung. Da es sich bei f'' um eine nach oben geöffnete Parabel ohne Nullstellen handelt, ist stets $f'' > 0$. f'' stellt die Steigung des Graphen von f' dar, also ist der Graph von f' streng monoton steigend.(b) $f'(x) = 0$: Das gezielte Raten einer Lösung dieser Gleichung 3. Grades misslingt.Wegen $f'(-2) = -20, f'(-1) = 3$ liegt (wegen der Stetigkeit von f') dazwischen eine Stelle mit $f'(x) = 0$ Durch Probieren mit dem Taschenrechner findet man: $f'(-1,242) \approx 0$.Da der Graph von f' streng monoton steigend ist (siehe (a)), ist $f'(x) < 0$ „links“ von dieser Stelle und $f'(x) > 0$ „rechts“ davon. Also handelt es sich für die Funktion f um genau einen Wechsel von fallend auf steigend, also um genau ein Minimum.

y -Wert: $f(-1,242) \approx -54,4$.