Lösungen weitere Themen (alter LP) — W
Kompakt-Überblick zum Grundwissen K 12 — 15

1.
Schnittpunkte: $f(x)=g(x)$; $\frac{1}{2}x^3+x^2=0$;
$x^2(\frac{1}{2}x+1)=0$; $x_{1/2}=0$, $x_3=-2$
$\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}x^3+x^2)dx=$
$=[\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3]_{-2}^{0}=0-(2-\frac{8}{3})=\frac{2}{3}$

2.
(a) $\int f(x)dx=\int(\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^{-2})dx=$
$=\frac{1}{4}x^2+x-\ln|x|+\frac{1}{2}x^{-1}+C$

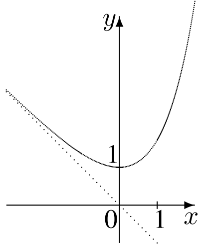
(b) $f(x)=2x+2+\frac{2x-1}{x^2-x}$ (Pol.division)
$\int f(x)dx=x^2+2x+\ln|x^2-x|+C$

(c) $\int(2x-1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(2x-1)^{\frac{4}{3}}+C$

3.
D: $D=\mathbb{R}$
A: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0}-x)\to\infty$, schräge Asymptote $y=-x$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{e^x-x}{x}}_{\to\infty}\cdot\underbrace{x}_{\to\infty}\to\infty$
S: Keine Symmetrie
N: $f(x)=0$; $e^x=x$ hat keine Lösung
(Graphen von $y=e^x$ und $y=x$ skizzieren!)
E: $f'(x)=e^x-1$; $f'(x)=0$; $e^x=1$; $x=0$.

$f'(x)<0$		$f'(x)>0$
fällt	0	steigt

Min$(0|1)$
W: $f''(x)=e^x>0$, stets linksgekr., kein WP
$W_f=[1;\infty[$



4.
D: $\frac{3x^2+1}{3x+1}>0$, also $D_f=]-\frac{1}{3};\infty[$
$f(x)=x[\ln(3x^2+1)-\ln(3x+1)]$
$f'(x)=1\cdot[\ln(3x^2+1)-\ln(3x+1)]+$
$+x\cdot[\frac{6x}{3x^2+1}-\frac{3}{3x+1}]$
N: $x=0$ oder $\ln(\frac{3x^2+1}{3x+1})=0$; $\frac{3x^2+1}{3x+1}=1$;
$3x^2+1=3x+1$; $3x(x-1)=0$;
$x=0$ oder $x=1$

5.
Die Lösung berücksichtigt nicht, dass die erste Person auch stehen könnte. Richtig wäre: Der erste Stuhl kann mit 120 Personen besetzt werden, der zweite mit 119 usw., also $120\cdot119\cdot\ldots\cdot21=\frac{120!}{20!}$ Möglichkeiten

6.
(a) Lange Reihe, erste Stelle 9 Mögl., usw.; also $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{2}=7560$ (Nenner 2 wegen Vertauschung links $\leftrightarrow$ rechts)

(b) $\binom{9}{5}=126$

(c) z. B. jede der 9 Personen entscheidet, ob sie aufs Foto will oder nicht

7.
(a) $B(3;\frac{1}{3};2)+B(3;\frac{1}{3};3)=0{,}25926$

(b) $\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}}+\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{8}{0}}{\binom{12}{3}}=0{,}23636$

8.
Treffer: Befragte Person: „Kleeblatt = Glück“
$H_0: p\le 0{,}25$ $\qquad H_1: p>0{,}25$
Entscheidungsregel: H_0 ablehnen („Schlagzeile trifft zu“), falls Trefferzahl $k\ge k_0$
$\alpha=P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt})=P(k\ge k_0)\le 0{,}05$;
$P_{n=100;p=0{,}25}(k\le k_0-1)\ge 0{,}95$
Tafel: $k_0-1=32$, also $k_0=33$.

9.
(a) Kombination zu $k=10$ Elementen aus $n=4$ mit Wh: $\binom{4+10-1}{10}=\binom{13}{10}=286$

(b) A: Genau 3 D $\qquad B$: Mindestens 7 A
$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(7\text{ A und }3\text{ D})}{1-P(\text{max. }6\text{ A})}=$
$=\frac{\binom{10}{7}\cdot0{,}25^{10}}{1-P_{n=10;p=0{,}25}(X\le6)}=0{,}0326$

(c) X_i: Gewinn des i-ten Kandidaten.
$E(X_i)=500\cdot0{,}25+\ldots=14125$,
$V(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=500^2\cdot$
$\cdot0{,}25+\ldots-14125^2\approx137\cdot10^6$

Auszahlsumme: $X=X_1+\ldots+X_{1000}$
$E(X)=1000E(X_1)=14{,}125\cdot10^6$,
$V(X)\overset{\text{unabh.}}{=}1000V(X_1)\approx137\cdot10^9$

10.
Soll gelten: $*=P(|X-E(X)|<a)\ge0{,}90$ (mit Bezeichnungen aus Aufgabe 9).
Da laut Tschebyschew $*\ge1-\frac{V(X)}{a^2}$, muss also $1-\frac{V(X)}{a^2}\ge0{,}90$ gefordert werden, also $a\ge\sqrt{\frac{V(X)}{0{,}10}}=\sqrt{\frac{137\cdot10^9}{0{,}10}}\approx1{,}2\cdot10^6$.
Intervall: $](14{,}1-1{,}2)\cdot10^6;(14{,}1+1{,}2)\cdot10^6[$