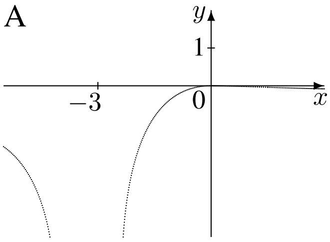
11. Klasse Übungsaufgaben	11
Gebrochen-rationale Funktionen	**03**

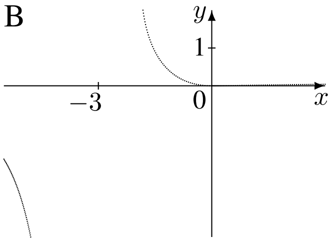
Weitere Beispiele und Aufgaben → grund85.pdf, ueb85.pdf.

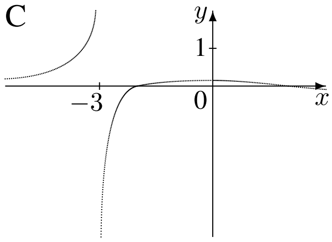
1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+5x}$.
   Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x)$.
   Fertigen Sie eine grobe Skizze des Funktionsgraphen.

2. Ermitteln Sie charakteristische Eigenschaften des Graphen:
   $f(x) = \dfrac{1-x}{0{,}5x^2 - x - 1{,}5}$

3. Formulieren Sie, was die Vielfachheit einer Polstelle über Vorzeichenwechsel an dieser Stelle bedeutet. Untersuchen Sie die folgenden Beispiele:
   (a) $f_1(x) = \dfrac{-x^2}{3x^2+18x+27}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{x^2}{(x+3)^3}$ (c) $f_3(x) = \dfrac{4-x^2}{x^3+27}$
   Ordnen Sie die folgenden Graphen diesen drei Funktionstermen zu:

A


B


C


4. Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion an mit folgenden Eigenschaften: $x = 2$ ist Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, $y = 3$ ist waagrechte Asymptote, es gibt keine Nullstellen, die y-Achse wird bei $y = 6$ geschnitten.

5. Geben Sie alle Asymptoten an:
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+8x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+8x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3+8x}{x^2-4} = x + \dfrac{12x}{x^2-4}$
   (Überzeugen Sie sich davon, dass die hier angegebene Umformung richtig ist!)
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{2} + 3x$ (e) $f(x) = \dfrac{7x^2-6x-3}{2x}$

6. Gegeben ist die Funktionenschar mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = \dfrac{-2x^2+50}{x^2+a}$.
   (a) Untersuchen Sie f_a auf Definitionsbereich und Nullstellen.
   Geben Sie den Schnittpunkt Y_a mit der y-Achse an.
   (b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f(x)$, sofern $a < 0$.
   (c) Fertigen Sie eine Skizze der Funktionsgraphen für $a = -25$, $a = -16$ und $a = 25$.