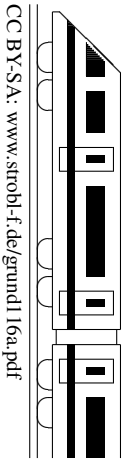


11. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP)	11
Differentiationsregeln	06



Allgemeines → grund112.pdf, Wurzeln, Parameter → grund115.pdf

Ableitungsformeln:

$f(x)$	1	x	x^2	x^n	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$	$\cos x$	$-\sin x$

Viele Funktionen lassen sich auf x^n zurückführen, z. B. $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Die Ableitung ergibt sich dann mit „alter Exponent ’runter, neuer ist um 1 kleiner“: $g'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. In manchen Fällen (insbes. bei Wurzeln) kann es sein, dass die Ableitung einen kleineren Definitionsbereich als die Funktion selbst hat. Exponential- und Logarithmusfunktion → grund117.pdf und grund118.pdf

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

„Das erste lassen mal das zweite differenzieren plus das erste differenzieren mal das zweite lassen“

Beispiel: $f(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = x \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{[n(x)]^2} = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}$

(„Nenner mal Ableitung des Zählers minus Zähler mal Ableitung des Nenners durch Nenner im Quadrat“)

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - 5) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{x^4 - 15x^2}{(x^2 - 5)^2}$

Tipps: Nenner nicht ausmultiplizieren; bei nochmaligem Differenzieren kürzen; manchmal lässt sich ein Nenner bequemer mit „hoch -1“ schreiben oder „auseinanderziehen“, Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3} = x^{-1} - 5x^{-3}$$

Kettenregel:

Begriff der Verkettung von Funktionen:

Beispiel: $f(x) = \sin(x^2)$ bedeutet: Zuerst x^2 („Inneres“), dann sin davon nehmen („äußere Funktion“)

Differenzieren verketteter Funktionen $f(x) = u(v(x))$: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

„Das Äußere differenzieren und das Innere einsetzen mal das Innere nachdifferenzieren“.

Beispiele: $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$
 $g(x) = (x^2 - 5x)^7 \Rightarrow g'(x) = 7(x^2 - 5x)^6 \cdot (2x - 5)$
 $h(x) = \sqrt{\sin x^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x$

Beispiel: Untersuchung („Diskussion“) der Bruchfunktion $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$

(Siehe auch grund111.pdf, grund109.pdf, grund113.pdf; Wendepunkte → 12. Klasse)

Definitionsbereich: Wegen des Nenners ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Asymptoten: Wegen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ist $y = 0$ waagrechte Asymptote;

wegen des Nenners ist $x = 0$ senkrechte Asymptote (Pol 3. Ordnung) mit $\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x) \rightarrow \mp \infty$

Symmetrie: $f(-x) = -f(x)$, also Punktsymmetrie zum Ursprung.

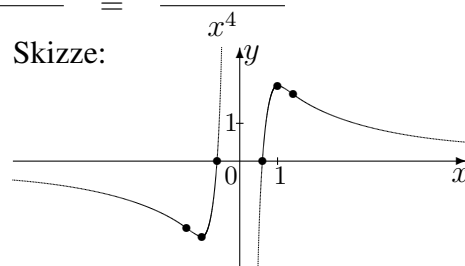
Nullstellen: $f(x) = 0$; $3x^2 - 1 = 0$; $x_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,58$

Extrema und Monotonie: $f'(x) = \frac{x^3 \cdot 6x - (3x^2 - 1) \cdot 3x^2}{x^6} \stackrel{\text{kürzen!}}{=} \frac{-3x^2 + 3}{x^4}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$f' < 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
fällt	steigt	steigt	fällt
	Min	Max	
	(-1 -2)	(1 2)	

Skizze:



Wertebereich (d. h. vorkommende y -Werte): $W_f = \mathbb{R}$