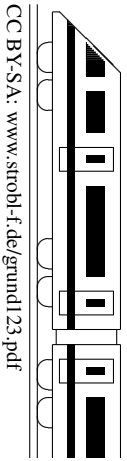


12. Klasse TOP 10 Grundwissen	12
Erwartungswert, Binomialverteilung	03



Zufallsvariablen ordnen jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu.

Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln dem Ergebnis (3; 6) die Anzahl der 2er, hier $X((3; 6)) = 0$.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(X = a)$ die jeweiligen Werte a auftreten.

Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln für die Anzahl X der 2er:

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Der **Erwartungswert** $\mu = E(X)$ gibt einen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert an: $\mu = E(X) = \sum_a a \cdot P(X = a)$.

Die **Varianz** $\sigma^2 = V(X)$ und die **Streuung (Standardabweichung)** $\sigma = \sqrt{V(x)}$ sind Maße für die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert: $\sigma^2 = V(X) = \sum_a (a - \mu)^2 \cdot P(X = a)$.

In obigem Beispiel: $\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{1}{3}$,
 $\sigma^2 = V(X) = (0 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{25}{36} + (1 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{10}{36} + (2 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

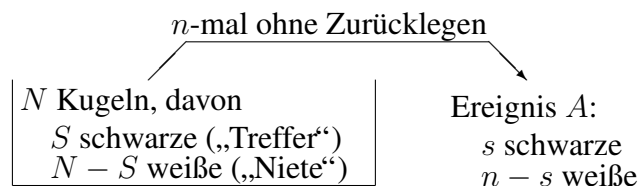
Wichtig zum Verständnis der Formeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist der **Binomialkoeffizient**, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus n Objekten eine Teilmenge von k Stück (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Taschenrechner: nCr-Taste.
 Zum Beispiel Lotto 6 aus 49:
 $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13\,983\,816$

Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s} \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

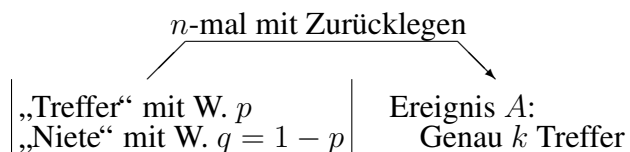


Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen

Ein Bernoulli-Experiment (zwei Versuchsausgänge: Treffer und Niete, Trefferwahrscheinlichkeit p) wird n -mal unabhängig durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge n zum Parameter p). Die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erhalten, ist dann

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(Binomialverteilung → Stochastik-Tafel).



Die Wahrscheinlichkeit, **höchstens** k Treffer zu erhalten, ist

$$B(n; p; 0) + B(n; p; 1) + \dots + B(n; p; k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$$

(Verteilungsfunktion → Stochastik-Tafel)

Beispiel 1: Bei einer bestimmten Telefon-Gesellschaft kommen 96 % aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 10 Gespräche erledigen. Treffer: „kommt durch“, $p = 0,96$, $n = 10$.

Betrachte A: „kommt genau einmal nicht durch“, B: „kommt mindestens achtmal durch“.

A: d. h. genau 9 Treffer: $P(A) = B(10; 0,96; 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,96^9 \cdot 0,04 = 0,27701$ (oder Tafel).

B: Komplement \bar{B} : „höchstens sieben Treffer“. $P(B) = P_{n=10, p=0,96}(k \geq 8) = 1 - P_{n=10, p=0,96}(k \leq 7) = 1 - 0,00621 = 0,99379$ (Tafel)

Beispiel 2: Wie oft muss das Experiment durchgeführt werden, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit **mindestens einmal** nicht durchzukommen, wenn die W. hierfür 0,04 beträgt?

Hier notiert man einen Ansatz („Soll gelten: $P_{n=?, p=0,04}(k \geq 1) \geq 0,90$ “), geht zum Komplement über („ $P_{n=?, p=0,04}(k = 0) \leq 1 - 0,90$, d. h. $0,96^n \leq 0,10$ “) und löst die entstehende Exponentialgleichung durch beidseitiges Logarithmieren („ $n \ln 0,96 \leq \ln 0,10$, d. h. $n \geq \frac{\ln 0,10}{\ln 0,96} \approx 56,4$, also $n \geq 57$ “).

Für binomialverteilte Zufallsvariablen gilt $\mu = E(X) = np$ und $\sigma^2 = npq = np(1 - p)$.