10. Klasse Lösungen — 10
Ganzrationale Funktionen — 05

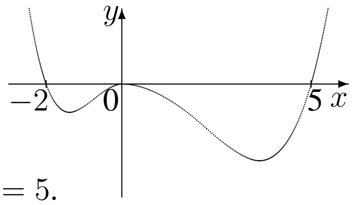
1. (a) Wegen „$+3x^6$“ von links oben nach rechts oben.
   (b) Wegen „$+\pi x^5$“ von links unten nach rechts oben.
   (c) $f_3(x) = -2x^5 + 3x^3 + x - 7$, wegen „$-2x^5$“ von links oben nach rechts unten.
   (d) Wegen „$-\frac{1}{3}x^4$ von links unten nach rechts unten.

2. (a) P: $f(-x) = (-x)^{11} - (-x)^5 + 2(-x) = -x^{11} + x^5 - 2x = -(x^{11} - x^5 + 2x) = -f(x)$.
   (b) A: $f(x) = (x^2+10)(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) = (x^2+10)(x^2-10) = x^4 - 100$
   (c) A: $f(-x) = (-x)^6 - 9(-x)^4 = x^6 - 9x^4 = f(x)$.
   (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-3)}$ hat Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$; der Funktionsgraph kann also nicht symmetrisch sein, da schon D_f nicht symmetrisch ist.
   Sichtbar ist die Nicht-Symmetrie auch an einem Gegenbeispiel, z. B. $f(-2) = \frac{4-1}{-8-3\cdot 4} = -\frac{3}{20}$, aber $f(2) = \frac{4-1}{8-3\cdot 4} = -\frac{3}{4}$.
   (e)

	y-Achsen-Schnitt	Nullstellen $f(x) = 0$
(b)	$y = f(0) = 0$	$x_{1/2/3/4} = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = -3$
(c)	$y = f(0) = 100$	$x_{1/2} = \pm\sqrt{10}$ (da x^2+1 nicht 0 werden kann)
(d)	kein (da $f(0)$ Nenner ↯)	$x_{1/2} = \pm 1$

   (f) sin ist punktsymmetrisch zum Ursprung, cos achsensymmetrisch zur y-Achse.
   (g) P: $f(-x) = (\sin(-x)\cdot\cos(-x))^3 = (-\sin x\cdot\cos x)^3 = -(\sin x\cdot\cos x)^3 = -f(x)$.

3. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$. Verlauf von links oben nach rechts oben.
   Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 3x - 10) = 0$.
   $x_{1/2} = 0$ oder
   $x^2 - 3x - 10 = 0$, $x_{3/4} = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 5$.



4. Nullstellen: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{15}{4}x^2 + 4 = 0$. Substitution $u = x^2$:
   $-\frac{1}{4}u^2 + \frac{15}{4}u + 4 = 0$; $u_{1/2} = \frac{-3{,}75\pm\sqrt{3{,}75^2-4\cdot(-0{,}25)\cdot 4}}{2\cdot(-0{,}25)}$, $u_1 = -1$, $u_2 = 16$.
   Rücksubstitution: $x^2 = -1$ (↯) oder $x^2 = 16$, also $x_{1/2} = \pm 4$.

5. Der Zeichnung entnimmt man die Nullstellen -4 (einfach) und 2 (doppelt); Ansatz also $y = a(x+4)(x-2)^2$.
   Der Zeichnung entnimmt man ferner $(0|-2)$ als Punkt des Graphen. Einsetzen dieser x- und y-Werte liefert:
   $-2 = a\cdot(0+4)(0-2)^2 = 16a$, also $a = -\frac{1}{8}$.
   Somit $f(x) = -\frac{1}{8}(x+4)(x-2)^2$.

6. (a) $f(x) = 0$; $\frac{1}{8}x^2(x-6) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = 6$.
   (b) Lösungen der Gleichung sind $x_4 = -2$ und $x_{5/6} = 4$ (doppelt).
   An diesen Stellen ist der y-Wert von f gleich -4, wobei bei $x_{5/6} = -4$ die Horizontale $y = -4$ berührt wird.
   (c) f steigt in $]-\infty;0[$, fällt in $]0;4[$ und steigt in $]4;\infty[$.
   h steigt in $]-\infty;0[$ und fällt in $]0;\infty[$.
   Die Gleichung $f(x) = h(x)$ hat genau eine Lösung, da es genau einen Schnittpunkt gibt.