11. Klasse Lösungen — 11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren — 10

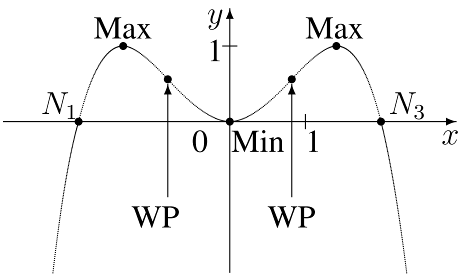
1.
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$
$D = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to -\infty$: Verlauf von „links unten nach rechts unten".
$f(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + (-x)^2 = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$
$= f(x)$: Achsensymmetrie zur y-Achse.
N: $f(x) = 0$: $x^2(-\frac{1}{4}x^2 + 1) = 0$. $x_{1/2} = 0$ oder $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$, d. h. $x_{3/4} = \pm 2$
E: $f'(x) = -x^3 + 2x$. $f'(x) = 0$:
$x(-x^2 + 2) = 0$. $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$.

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
steigt	$-\sqrt{2}$	fällt	0	steigt	$\sqrt{2}$	fällt
	Max		Min		Max	

Max$(-\sqrt{2}|1)$, Min$(0|0)$, Max$(\sqrt{2}|1)$
W: $f''(x) = -3x^2 + 2$.
$f''(x) = 0$: $x_{1/2} \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' < 0$
rechts-	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	links-	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	rechts-gekrümmt
	WP		WP	

WP$(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{5}{9})$



Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-2|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2|3)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|0)$
Wertebereich: $W =]-\infty; 1]$

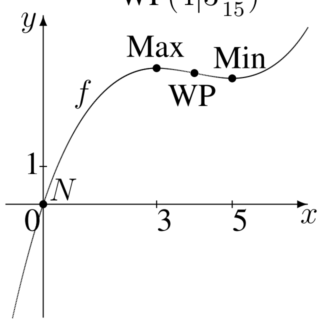
2.
$f'(x) = x - 1$
$f(x_0) = f(5) = 4{,}5$, also $P_0(5|4{,}5)$.
Tangentensteigung $f'(x_0) = f'(5) = 4$.
Erster Näherungswert und neuer Startwert:
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \frac{4{,}5}{4} = 3{,}875$.
Zweiter Iterationsschritt:
$f(x_1) = f(3{,}875) \approx 0{,}6328$, Tangentensteigung $f'(x_1) = f'(3{,}875) = 2{,}875$.
Zweiter Näherungswert:
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 3{,}875 - \frac{0{,}6328}{2{,}875} \approx 3{,}6549$.

3.
$f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x$, $D = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to \pm\infty$: Verlauf von „links unten nach rechts oben".
$f(-x) = -\frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 - 3x$ ist weder $f(x)$ noch $-f(x)$: Keine spezielle Symmetrie
N: $f(x) = 0$: $x(\frac{1}{15}x^2 - 0{,}8x + 3) = 0$. $x_1 = 0$,
$x_{2/3} = \frac{0{,}8 \pm \sqrt{0{,}64 - 4\cdot\frac{1}{15}\cdot 3}}{2\cdot\frac{1}{15}}$ ↯
E: $f'(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 - 4\cdot 0{,}2\cdot 3}}{2\cdot 0{,}2}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 3$

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
steigt	3	fällt	5	steigt
	Max$(3|3{,}6)$		Min$(5|3\frac{1}{3})$	

W: $f''(x) = 0{,}4x - 1{,}6$. $f''(x) = 0$: $x = 4$

$f'' < 0$		$f' > 0$	
rechts-	4	links-	gekrümmt
	WP$(4|3\frac{7}{15})$		



Schnitt mit x- und y-Achse: $(0|0)$

Wertebereich: $W = \mathbb{R}$

4.
$f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x + 2$
$f'(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3$
$x_0 = -1$. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, also
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{-\frac{28}{15}}{4{,}8} = -\frac{11}{18} \approx -0{,}6111$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx -\frac{11}{18} - \frac{-0{,}1473}{4{,}0525} \approx -0{,}5748$.
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx -0{,}5745$.
Wenn bei $x_0 \geq 3$ eine Tangente gelegt wird, verläuft die Tangente dann eventuell sehr flach oder sogar waagrecht, sodass sie ihre Nullstelle sehr weit außen bei einem ganz anderen x-Wert oder sogar gar nicht hat.
Formal: Sehr kleiner Nenner $f'(x_0)$, z. B kann bei $x_0 = 3$ nicht durch $f'(x_0) = 0$ dividiert werden.