11. Klasse Lösungen — 11
Differenzieren — 06

1. Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) ergeben sich aus $f(x) = 0$ und sind im Folgenden mit N_i bezeichnet. Der Schnittpunkt Y mit der y-Achse ergibt sich durch Berechnung von $f(0)$.
   (a)
   - $f_1'(x) = 4x^3$
   - $f_2'(x) = -x - 2$
   - $f_3'(x) = 0$
   - $f_4(x) = x^3 + 6x - 7$, also $f_4'(x) = 3x^2 + 6$

   (b)
   - $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$; Steigungen: $f_1'(-2) = -32$, $f_1'(2) = 32$. $Y(0|-16)$; Steigung $f_1'(0) = 0$ (waagrechte Tangente).
   - $N_1(2|0)$, $N_2(-6|0)$; Steigungen: $f_2'(2) = -4$, $f_2'(-6) = 4$. $Y(0|6)$; Steigung: $f_2'(0) = -2$.
   - f_3 ist eine Parallele zur x-Achse und hat keine Nullstellen. $Y(0|11)$; Steigung: $f_3'(0) = 0$.
   - $N_1(1|0)$; Steigung: $f_4'(1) = 9$. $Y(0|-7)$; Steigung: $f_4'(0) = 6$.

2. (a) $f'(x) =$ Geschwindigkeitsänderung pro Zeit $=$ Beschleunigung zur Zeit x.
   (b) $f(x) = (2x)^3 = 8x^3$. $f'(x) = 24x^2 = 6 \cdot (2x)^2 =$ Oberfläche der Würfels.
   Anschaulich ist $f(x+h)$ das Volumen eines Würfels, der außen zusätzlich mit einer Haut der Dicke h überzogen ist. $f(x+h) - f(x)$ ist das Volumen der Haut. Dividert man dieses Volumen durch die Dicke h, so erhält man die Fläche.

3. $f(x) = |\frac{1}{2}x+1| = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{, falls } \frac{1}{2}x+1 \ge 0 \\ -(\frac{1}{2}x+1) & \text{, falls } \frac{1}{2}x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{, falls } x \ge -2 \\ -\frac{1}{2}x-1 & \text{, falls } x < -2 \end{cases}$
   Die Funktion ist an der Stelle $x = -2$ nicht differenzierbar, denn die Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(-2+h)+1-0)}{h} = \frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h} = \frac{-\frac{1}{2}(-2-h)-1-0}{-h} = -\frac{1}{2}$ stimmen nicht überein.

   Anschaulich ist $f(x) = |\frac{1}{2}(x+2)|$ eine um 2 nach links und mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckte Betragsfunktion, so dass f an der Stelle -2 einen Knick aufweist.

4. $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$
   $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{7(4+h)^2-8(4+h)-1-(7\cdot 4^2-8\cdot 4-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{7(16+8h+h^2)-32-8h-1-79}{h}$
   $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{112+56h+7h^2-8h-112}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{48h+7h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(48+7h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(48+7h) = 48$

5.

$f(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$7x^2-8x-1$	$\frac{7}{3}x^3-4x^2-x$
$f'(x)$	1	x	x^2	x^3	x^n	$14x-8$	$7x^2-8x-1$

(erste Zeile jeweils plus additive Konstante $+c$; Nebenrechnung: $f(x) = 7 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x + c$)

6. Zur Ermittlung der Ableitung legt man an verschiedenen Punkten des Graphen eine Tangente und bestimmt mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dessen Steigung. Die so gewonnenen Werte werden in ein Koordinatensystem eingetragen. So ist z. B. bei $x = -2$ die Steigung 0 ($\to$ Punkt $(-2|0)$), ebenso bei $x \approx -0{,}8$; bei $x = 0$ ist die Steigung etwa -4 ($\to$ Punkt $(0|-4)$).