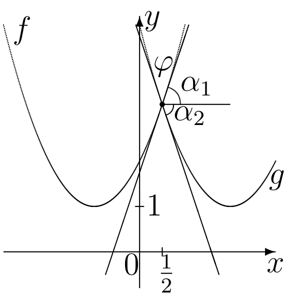
11. Klasse Lösungen — 11
Ableitung, Tangenten — 07

1.
$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$
Tangente:
$y = f(1) = -36$. Also $P(1|-36)$.
$m = f'(1) = 19$
Ansatz für die Tangente: $y = 19x + t$.
P einsetzen: $-36 = 19 \cdot 1 + t$; $t = -55$.
Also Tangente: $y = 19x - 55$.

Normale:
$y = f(-1) = -54$. Also $Q(-1|-54)$.
Funktionssteigung $m_1 = f'(-1) = 3$.
Für die Normalensteigung m_2 gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$
Ansatz für die Normale: $y = -\frac{1}{3}x + t$
Q einsetzen: $-54 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + t$; $t = -54\frac{1}{3}$. Also Normale: $y = -\frac{1}{3}x - 54\frac{1}{3}$.

2.
Falls ein Berührpunkt vorliegt, muss dort die Geradensteigung gleich der Funktionssteigung sein: $g'(x) = f'(x)$:
$\frac{15}{4} = 3x^2 - 3$; $x_{1/2} = \pm\frac{3}{2}$.
Zusätzlich muss ein gemeinsamer Punkt vorliegen, also $g(x) = f(x)$ sein.
Für $x_1 = +\frac{3}{2}$ ist (einsetzen, nachrechnen!) dies nicht der Fall, dagegen für $x_2 = -\frac{3}{2}$ ist $g(x_2) = f(x_2) = \frac{25}{8}$, so dass die Gerade im Punkt $(-\frac{3}{2}|\frac{25}{8})$ Tangente des Funktionsgraphen ist.

3.
Schnittstelle: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Steigungen: $f'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 2x - 4$.
$m_1 = f'(\frac{1}{2}) = 3$, $m_2 = g'(\frac{1}{2}) = -3$.
$\tan\alpha = m \Rightarrow \alpha_1 \approx 71{,}6°$, $\alpha_2 \approx -71{,}6°$.



Größerer Winkel zwischen den Tangenten: $\alpha_1 + |\alpha_2| = \alpha_1 - \alpha_2 = 71{,}6° + 71{,}6° = 143{,}2°$.
Kleinerer Winkel (Schnittwinkel): $\varphi = 180° - 143{,}2° = 36{,}8°$.

4.
Nein, die Funktionen können sich durch eine additive Konstanten unterscheiden, welche beim Differenzieren wegfällt, so haben z. B. $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^2 - 11$ beide die Ableitung $f'(x) = h'(x) = 2x$.
Anschaulich haben im Fall $f' = h'$ die Funktionen überall die gleiche Steigung und können daher in y-Richtung verschoben sein.

5.
(a) $x^2 - 7x + k = 0$; $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2 \cdot 1}$ mit Diskriminante $D = 49 - 4k$.

Ist $D > 0$, also $49 - 4k > 0$, also $k < 12{,}25$, gibt es zwei Lösungen für die Nullstellen.
Ist $D = 0$, also $k = 12{,}25$, gibt es genau eine doppelte Nullstelle.
Ist $D < 0$, also $k > 12{,}25$, gibt es keine Nullstellen.

(b) Gemeinsame Punkte durch Gleichsetzen, d. h. $x^2 - 7x + 12{,}25 = -2x + t$ muss genau eine Lösung haben.
$x^2 - 5x + 12{,}25 - t = 0$; $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (12{,}25 - t)}}{2 \cdot 1} = \frac{2{,}5 \pm \sqrt{4t - 24}}{2}$.
Diese Gleichung hat genau eine Lösung, wenn unter der Wurzel 0 steht, also $4t - 24 = 0$, also $t = 6$.

Zweiter Lösungsweg: Parabelpunkt mit gleicher Steigung -2 wie die Gerade:
$f'_{12{,}25}(x) = 2x - 7$; $f'_{12{,}25}(x) = -2$; $2x - 7 = -2$; $x = \frac{5}{2}$.
y-Wert Parabelpunkt B: $f_{12{,}25}(\frac{5}{2}) = 1$.
$B(\frac{5}{2}|1)$ muss auf der Geraden liegen:
Einsetzen: $1 = (-2) \cdot 2{,}5 + t$; $t = 6$.

6.
$f'(x) = -0{,}25 \cdot 2x = -0{,}5x$. $B(b|f(b))$
Allgemeine Tangentengleichung in B:
$y = -0{,}5b \cdot (x - b) - 0{,}25b^2$.
$P(-0{,}5|0{,}5)$ einsetzen:
$0{,}5 = -0{,}5b \cdot (-0{,}5 - b) - 0{,}25b^2$
Gleichungslösungen: $b_1 = 1$, $b_2 = -2$.