11. Klasse Lösungen — 11
Krümmung, Wendepunkte — 09

1.

(a) $f'(x) = 8x^3 - 1$; $f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0$: $x^3 = \frac{1}{8}$; $x = \frac{1}{2}$. $f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow$ Min

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ | 0 | $f'' > 0$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0$:
$-2x^2(2x - 3) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

$f' > 0$ | | $f' > 0$ | | $f' < 0$
steigt | 0 | steigt | $\frac{3}{2}$ | fällt

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$:
$-12x(x - 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$f'' < 0$ | 0 | $f'' > 0$ | 1 | $f'' < 0$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x)$: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt $(1|1)$:
$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.
Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 0$.

$f' < 0$ | | $f' > 0$
fällt | 0 | steigt

Also Min$(0|0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ | 0 | $f'' > 0$

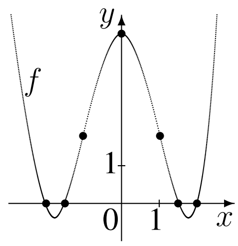
Also Flachpunkt $(0|0)$

2.
$f'(x) = 5x^4 - 5$, $f'(x) = 0$: $x_{1/2} = \pm 1$
$f''(x) = 20x^3$.
$f''(1) = 20 > 0$, also Min$(1| - 4)$,
$f''(-1) = -20 < 0$, also Max$(-1|4)$.

3.
Nullstellen: $f(x) = 0{,}5(x^2 - 2{,}25)(x^2 - 4) = 0{,}5(x+1{,}5)(x-1{,}5)(x+2)(x-2) = 0$ ergibt $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.
$f'(x) = 2x^3 - 6{,}25x$
$f''(x) = 6x^2 - 6{,}25$
$f''(x) = 0$: $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{6{,}25}{6}} \approx \pm 1{,}02$

$f'' > 0$ | | $f'' < 0$ | | $f'' > 0$
links- | $-1{,}02$ WP | rechts- | $1{,}02$ WP | links-gekrümmt

$y = f(\pm\sqrt{\frac{6{,}25}{6}}) = 0{,}5(\frac{6{,}25}{6} - 2{,}25)(\frac{6{,}25}{6} - 4) = \frac{2059}{288} \approx 1{,}79$, also Lage ungefähr WP$(\pm 1{,}02|1{,}79)$



Sichtbar am Term sind auch der y-Achsenschnitt bei $(0|4{,}5)$ und die Achsensymmetrie zur y-Achse.

4.
Ansatz wegen Achsensymmetrie mit geraden Funktionen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$;
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$; $f''(x) = 12ax^2 + 2b$
WP bei $x = 1$: $f''(1) = 0$: $12a + 2b = 0$ A
Nullstelle bei $x = 1$: $f(1) = 0$: $a + b + c = 0$ B
Steigung bei $x = 1$: $f'(1) = 2$: $4a + 2b = 2$ C
Aus A und C folgt $8a = -2$, also $a = -\frac{1}{4}$.
Mit A folgt $b = \frac{3}{2}$, mit B dann $c = -\frac{5}{4}$.
Also: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$.
Mittels Vorzeichenbetrachtung von f'' bestätigt man, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein WP vorliegt (und nicht nur ein Flachpunkt).

5.
Bis $x = 400$ ist der Graph rechtsgekrümmt, also $f'' < 0$. Die Preissteigerung bei Ausweitung der Produktion um 1 Stück wird verlangsamt. Bei $x = 400$ ist der Wendepunkt, hier ist die Preisersparnis pro Stück bei Ausweitung der Produktion am stärksten (Graph am steilsten nach unten gerichtet). Ab $x = 400$ ist der Graph linksgekrümmt, also $f'' > 0$, die Preissteigerung bei Produktionsausweitung nimmt immer stärker zu.