CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb118.pdf

11. Klasse Übungsaufgaben	11
Monotonie, Extrema	**08**

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen ($D_f = \mathbb{R}$) auf Nullstellen, Monotonie und Extrema. Dabei bemerken Sie: Bei einer doppelten Nullstelle (also ohne Vorzeichenwechsel) hat man eine Berührung der x-Achse und somit gleich eine Kontrolle für den nächsten Schritt, da hier dann ein Extremum vorliegen muss.

   Berechnen Sie, unter welchem Winkel in den anderen Nullstellen der Graph die x-Achse schneidet.

   (a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$
   (b) $f(x) = x^4 - 9x^2$

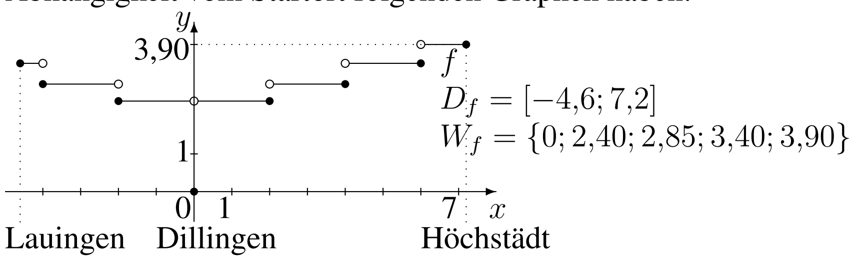
2. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Monotonie und fertigen Sie eine Skizze des Graphen.

   Begründen Sie damit, wie viele Nullstellen es gibt.

3. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{1}{15}x^3 - 0{,}8x^2 + 3x + 2$, $D = [0; \infty[$, auf relative und globale Maxima/Minima.

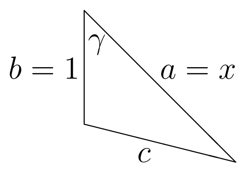
4. Finden Sie durch Rückwärts-Arbeiten einen Term zu einer Funktion, die an den Stellen $x = 2$ und $x = 5$ lokale Extrema hat.

5. Fasst man die Straße von Lauingen ($x = -4{,}6$) nach Höchstädt ($x = 7{,}2$) als Zahlenstrahl auf, so könne der Bus-Fahrpreis nach Dillingen ($x = 0$) (im Jahr 2024) in Abhängigkeit vom Startort folgenden Graphen haben:



   Beschreiben Sie den Graphen in Hinblick auf Monotonie und globale Extrema.

6. In jedem Dreieck gilt der cos-Satz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Wendet man diesen Satz auf ein Dreieck mit $\gamma = 45°$, $b = 1$ und variabler Seite $a = x$ an, so erhält man wegen $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $c = \sqrt{x^2 + 1^2 - 2x \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$.
   Die Seite c ist also dann besonders lang, wenn x sehr groß ist, denn dieser Wurzel-Term ist umso größer/kleiner, je größer/kleiner der Radikand ist.



   Um herauszufinden, wie lang die Seite c mindestens ist, genügt es also, ein Minimum von $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ zu finden.

   Finden Sie den Scheitel von f durch Differenzieren und zeigen Sie auf diese Weise, dass für das Dreieck in diesem Extremalfall $c = a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt; das Dreieck ist dann somit ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck („halbes Quadrat").