13. Klasse Übungsaufgaben — 13

Lagebeziehung Gerade – Ebene — 08

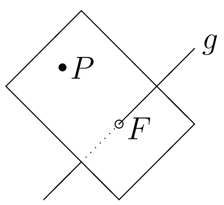
1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und der gegebenen Ebene; falls sie sich schneiden, berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel, falls sie echt parallel sind, den Abstand $d(g, E)$.
   (a) $E: x_1 - x_2 - 5x_3 = 26$
   (b) $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8 = 0$
   (c) $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$

2. Gegeben sind die Ebene $E: 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 3$ und mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$ die Schar der Geraden $g_k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$. Für welchen Wert des Parameters k sind E und g_k (a) parallel, (b) senkrecht zueinander?

3. Gegeben sind $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, sowie $E_1: x_1 + 2x_3 = 4$ und $E_2: 3x_1 - 4x_2 = 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Gerade s in beiden Ebenen E_1 und E_2 enthalten ist und somit die Schnittgerade darstellt.
   (b) Berechnen Sie für die Ebenen die Achsenpunkte und die Gleichungen der Spurgeraden und für die Gerade die Spurpunkte. Zeichnen Sie die Ebenen und die Gerade in ein Koordinatensystem.

4. **Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene projizieren), Punkt an Ebene spiegeln**
   Aus grund136.pdf ist folgende Vorgehensweise bekannt: Mit Aufpunkt P und Richtungsvektor = Normalenvektor der Ebene stellt man die Gleichung der Lotgeraden auf und schneidet sie mit der Ebene.
   Beispiel: Lot vom Punkt $P(-1|-2{,}4|-2{,}5)$ auf $E: 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$:
   Lotgerade $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2{,}4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ in E: $15(-1+15\tau)+12(-2{,}4+12\tau)+20(-2{,}5+20\tau) = 60$, $\tau = 0{,}2$, also Fußpunkt $F(2|0|1{,}5)$.
   Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'} = \overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'} - \vec{F} = \vec{F} - \vec{P}$, also $\vec{P'} = 2\vec{F} - \vec{P}$, hier also $P'(5|2{,}4|5{,}5)$.
   Berechnen Sie ebenso Lotfußpunkt und P' für $P(9|2|-5)$ und $E: x_1 - 3x_3 = 4$.

5. **Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g**
   Zur Bestimmung des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g kann anstelle des Verfahrens von grund134.pdf auch durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zu g aufgestellt werden und die Gerade g mit dieser Ebene geschnitten werden.



   Beispiel: $P(1|-1|4)$ und g_1 aus Aufgabe 2.
   Ansatz für $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. Einsetzen von P liefert $d = 2 - 1 - 20 = -19$.
   g_1 in E eingesetzt: $2 \cdot (7 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 5(-2 - 5\lambda) = -19$; $\lambda = -1{,}5$.
   λ in g_1 liefert $F(4|0{,}5|5{,}5)$ und damit Abstand $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{13{,}5}$ wie in grund125.pdf.
   Berechnen Sie so den Abstand des Punktes $P(0|0|-27)$ von s aus Aufgabe 3.

6. Beschreiben Sie, wie man die Schnittpunkte der Geraden s aus Aufgabe 3 mit der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 27)^2 = 27^2$ berechnen kann.